سلسلة مذكرات

الإبداع

في الرياضيات

الصف الثالث الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

إعداد/

أ/ جميل غالي السيد

مكتبة وسام

شربين ـ شارع حسني مبارك ـ خلف الثانوية بنات

01004423597 ـ 3943035

مقدمة

كلمة الطموح تعنى إبداع العقل ووصوله إلى مدارك الفهم والذكاء ،،

وكلمة **الإبداع** تعنى العيش على القمة وإستنشاق عزة العالى لإنه يرجو دائما المعالى لا يقنع بغيره ولا يرضى إلا القمة المستحقةعن جدارة ،،،،،،

فارجومن الله أن أكون قدمت ما على من خلال هذا العمل المتواضع بين أيديكم

والله أدعوا أن يوفقكم إلى ما تأملونه أنتم ووالديكم

مع أرق الأمنيات بالنجاح والتميز ،،،

أ/ جميل غالى السيد

❖ كيف نذاكر مادة الرياضيات :



- نحفظ قوانين الدرس جيدا " بالورقة والقلم "
- نذاكر الأمثلة المحلولة جيدا " بالورقة والقلم "
- نحيد حل الأمثلة المحلولة مرة أخرى دون النظر إلى الإجابة
- نقوم بحل تمارين متنوعة على الدرس

توزيع مقرر الرياضيات للصف الثالث الإعدادى
الفصل الدراسى الأول

الشهر	الجبر والإحصاء	حساب المثلثات والهندسة
باقى سبتمبر وأكتوبر	الوحدة الأولى (العلاقات والدوال) : • حاصل الضرب الديكارتى. • العلاقات. • الدالة (التطبيق). • دوال كثيرت الحدود. الوحدة الثانية (النسبة والتناسب – التغير) : • النسبة.	الوحدة الرابعة (حساب المثلثات) : • النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة. • النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة. • إيجاد الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها.
نوفمبر	• التناسب. • التغير الطردى. • التغير العكسى.	الوحدة الخامسة (الهندسة التحليلية) : • البعد بين نقطتين. • إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة. • ميل الخط المستقيم والعلاقة بين ميلى المستقيمين (المتوازيين ، المتعامدين).
ديسمبر	الوحدة الثالثة (الإحصاء) : • جمع البيانات. • التشتت.	• تابع الخط المستقيم. • معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات.
يناير	تمارين متنوعة وحل نماذج الامتحانات	

الابداع

فى

الرياضيات

أولا :- الجبر والاحصاء

الوحدة الأولى :-

العلاقات والدوال

(1) حاصل الضرب الديكارتي

(2) العلاقـــــات

(3) دوال كثيـرات الحدود

اختبـــار الوحـدة

"الوحدة الأولى"

(1) حاصل الضرب الديكارتي

*** الزوج المرتب :-**

يسمى (أ، ب) زوجًا مرتبًا ، ويسمى أ بالمسقط الأول ،
يسمى ب بالمسقط الثاني
أي يسمى أ بالإحداثي السيني ، ويسمى ب بالإحداثي الصادي

⟸ ملحوظات :-

① (٢، ٥) ≠ (٥، ٢) ، {٣، ٤} ≠ (٣، ٤) .

② ٣ ∈ {٣، ٥} ولكن ٣ ∉ (٣، ٥) .

③ إذا كان (أ، ب) = (س، ص) فإن أ = س ، ب = ص

مثال ① :-

أوجد قيمة أ، ب إذا كان

① (٣، ٥) = (أ، ب-٤)

② (√أ ، ½ ب) = (٤، -٣)

الحل

① ∵ (٣، ٥) = (أ، ب-٤) ∴ أ = ٣ ⟸ أ = ٣

∴ ٥ = ب - ٤ ⟸ ب = ٥ + ٤ ⟸ ب = ٩

② ∵ (√أ ، ½ ب) = (٤، -٣) ∴ √أ = ٤ ⟸ أ = ١٦

∴ ½ ب = -٣ (×٢) ⟸ ب = -٦

*** تدريب ***

أوجد قيمة أ، ب إذا كان :-

① (أ-٢، ب-١) = (٢، -٣) ، ② (س+١، ص²) = (٣، ٩)

أولاً :- حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين وتمثيله :-

تعريف :- إذا كان س ، ص مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين فإن :-

① س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

معناه :- جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر ينتمي إلى س ومسقطها الثاني عنصر ينتمي إلى ص .

② ص × س = { (أ ، ب) : أ ∈ ص ، ب ∈ س }

معناه :- جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر ينتمي إلى ص ومسقطها الثاني عنصر ينتمي إلى س .

③ س × س = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س } ← يمكن أن تكتب س² وتقرأ "س اثنين"

معناه :- جميع الأزواج المرتبة والتي كلا من مسقطها الأول والثاني عناصر تنتمي إلى س .

⇐ **ملحوظة** :- يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتي بالمخطط السهمي أو المخطط البياني

مثال ① :- إذا كان س = {٣ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣} أوجد :-

① س × ص ② ص × س ③ س × س

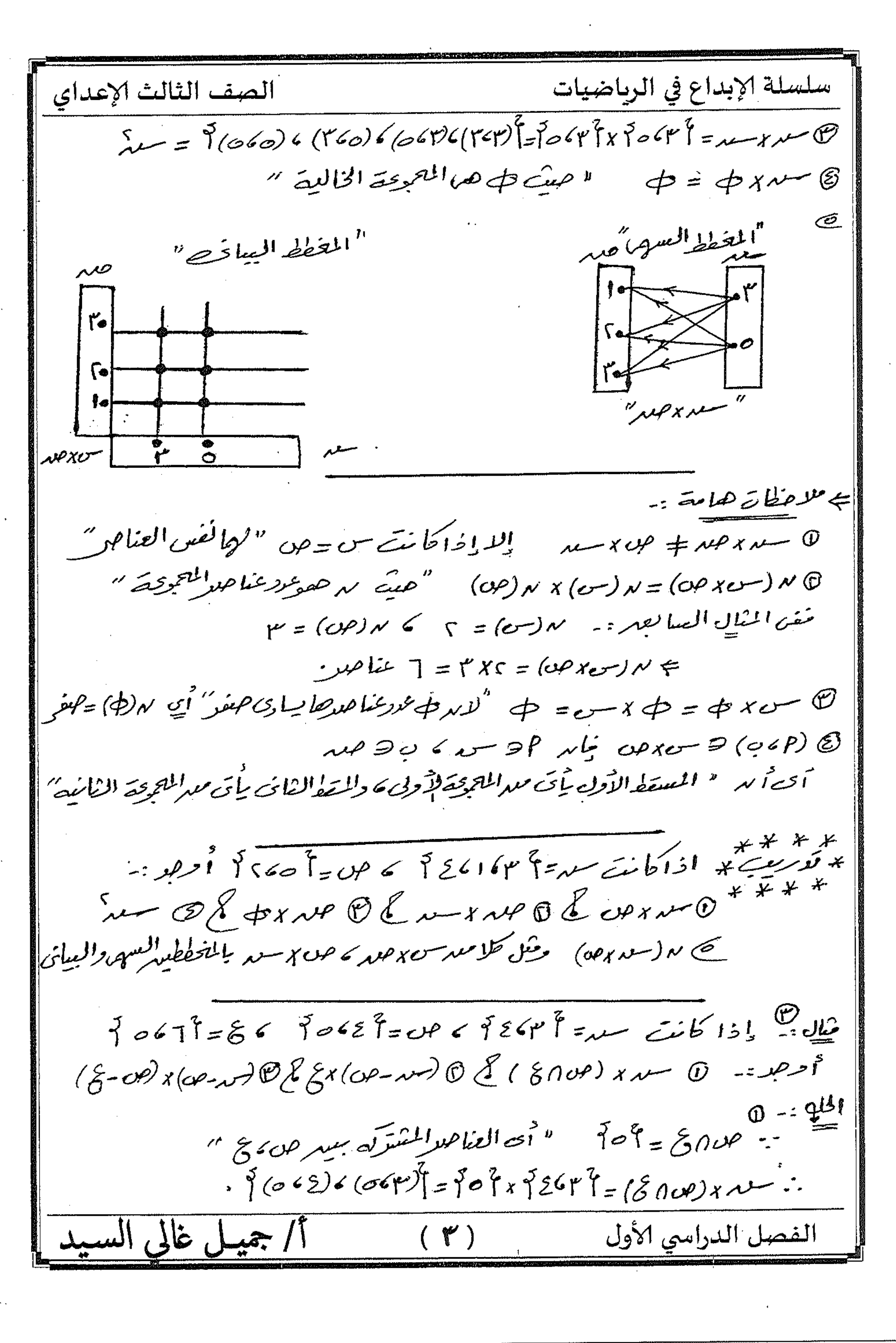
④ س × ∅ ⑤ مثل س × ص بمخطط سهمي وآخر بياني .

الحل :-

① س × ص = {٣ ، ٥} × {١ ، ٢ ، ٣} = {(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣)}

② ص × س = {١ ، ٢ ، ٣} × {٣ ، ٥} = {(١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥)}

⇐ نلاحظ أن س × ص ≠ ص × س .



③ $س \times س = \{٣، ٥\} \times \{٣، ٥\} = \{(٣، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ٣)، (٥، ٥)\} = س^٢$

④ $س \times \phi = \phi$ "حيث ϕ هي المجموعة الخالية"

⑤

"المخطط السهمي" — "المخطط البياني"

ملاحظات هامة :-

① $س \times ص \neq ص \times س$ إلا إذا كانت س = ص "لها نفس العناصر"

② $ن(س \times ص) = ن(س) \times ن(ص)$ "حيث ن هو عدد عناصر المجموعة"

ففي المثال السابق :- ن(س) = ٢ ، ن(ص) = ٣

$\Leftarrow$ ن(س × ص) = ٢ × ٣ = ٦ عناصر

③ $س \times \phi = \phi \times س = \phi$ "لأن ϕ عدد عناصرها يساوي صفر" أي ن(ϕ) = صفر

④ (أ ، ب) $\in$ س × ص فإن أ $\in$ س ، ب $\in$ ص

أي أن "المسقط الأول يأتي من المجموعة الأولى ، والمسقط الثاني يأتي من المجموعة الثانية"

تدريب إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ١} ، ص = {٥ ، ٢} أوجد :-

① س × ص ② ص × س ③ ص × ϕ ④ $س^٢$

⑤ ن(س × ص) ومثل كلا من س × ص ، ص × س بالمخططين السهمي والبياني

مثال ③: إذا كانت س = {٣ ، ٤} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٥ ، ٦}

أوجد :- ① س × (ص ∩ ع) ② (س − ص) × ع ③ (س − ص) × (ص − ع)

الحل :- ①

∵ ص ∩ ع = {٥} "أي العناصر المشتركة بين ص ، ع"

∴ س × (ص ∩ ع) = {٣ ، ٤} × {٥} = {(٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥)} .

② ∵ س − ص = {٣}   "العناصر الموجودة في س وغير موجودة في ص"

∴ (س − ص) × ع = {٣} × {٦ ، ٥} = {(٣ ، ٦) ، (٣ ، ٥)} .

③ ∵ س − ص = {٣} ، ص − ع = {٤}

∴ (س − ص) × (ص − ع) = {٣} × {٤} = {(٣ ، ٤)} .

مثال ④ :- اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان س = {٤} فإن س² = ...   [{١٦} ، {(٤ ، ٤)} ، ١٦ ، {٤}]

② ص × ∅ = ...   [ص ، ∅ ، {٠} ، {(٠ ، ٠)}]

③ {٢} × {٣} = ...   [{٦} ، ٦ ، {٢ ، ٣} ، {(٢ ، ٣)}]

④ إذا كان ن(س) = ٣ ، ن(س × ص) = ١٥ فإن ن(ص) = ...   [٥ ، ٤٥ ، ١٢ ، ١٥]

الحل :-

① {(٤ ، ٤)} ، ② ∅ ، ③ {(٢ ، ٣)} ، ④ ٥

تمارين على "حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين وتمثيله"

[١] في كل مما يأتي أوجد قيم أ ، ب إذا كان :-

① (أ ، ب) = (−٥ ، ٩)
② (أ − ٢ ، ب + ١) = (٢ ، −٣)
③ (أ ، ب) = (√٢٥ ، ∛٢٧)
④ (أ − ٧ ، ٢٦) = (−٢ ، ب³ − ١)
⑤ (٦ ، ب − ٣) = (أ − ٢ ، −١)
⑥ (أ² ، ١) = (٣٦ ، ب⁵)
⑦ (٣ ، ب) = (٥أ − ١ ، ٤أ)
⑧ ($\frac{س}{٢}$ ، ٥) = (٩ ، √ص)
⑨ (س ، س + ص) = ($\frac{١}{٢}$ ، ١)

---

[٢] إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥} أوجد س × ص ومثله :-

أ- بالمخطط السهمي   ب- بالمخطط البياني

[٣] إذا كانت س = {٢ ، −١} ، ص = {٤ ، ٠} ، ع = {٤ ، ٥ ، −٢} أوجد

١- س × ص ، ٢- ص × ع ، ٣- س² ، ٤- ن(س × ع) ، ٥- ن(ص²)

٤ إذا كانت س = {٢، ٣} ، ص = {٣، ٤، ٥} أوجد :-

١- س × ص ومثله بالمخطط السهمي ٢- ن(س × ص) ٣- (س × ص) ∩ ص²

٥ إذا كانت س × ص = {(١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥)} أوجد :-

١- س ، ص ٢- ص × س ٣- ص²

٦ إذا كانت س = {١} ، ص = {٢، ٣} ، ع = {٢، ٥، ٦}

مثل المجموعات س ، ص ، ع بشكل فن ثم أوجد :-

١- س × ص ٢- (س × ص) ∪ (ص × ع) ٣- (ع - ص) × (س ∪ ص)

---

٧ أكمل ما يأتي :-

① {٢، ٣} × {٤، ٥} = ...

② إذا كان س × ص = {(٢، ٦)، (٢، ٩)، (٣، ٦)، (٣، ٩)، (٥، ٦)، (٥، ٩)}

فإن س = ... ، ص = ...

③ إذا كان (س - ١، ١١) = (٨، ص + ٣) فإن $\sqrt{\text{س} + \text{ص}}$ = ...

④ إذا كان (٣، ٥) ∈ {٣، ٢} × {٨، م} فإن م = ...

⑤ إذا كان س = {١، ٢} ، ص = {٣، ٤} فإن (٣، ٤) ∈ ....

(س × ص ، ص × س ، س² ، ص²) أختر.

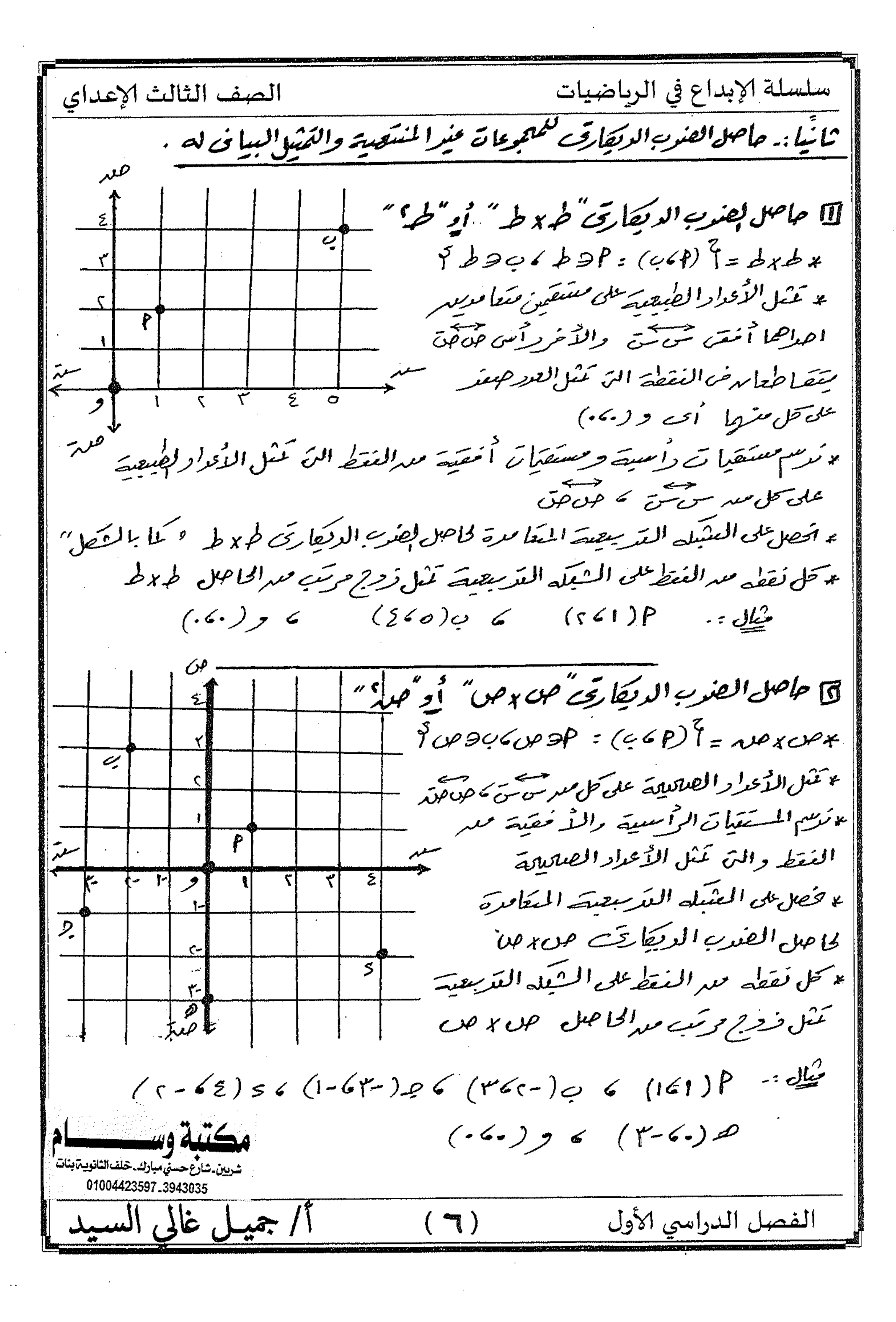
⑥ {٠} × {٢، ٣} = ...

⑦ {(٣، ٦)} = ... × ......

⑧ إذا كان ن(س) = ٣ ، ن(س × ص) = ١٢ فإن ن(ص²) = ...

⑨ إذا كان س = {٥، ٦} فإن ن(س × ∅) = ...

⑩ إذا كان ن(س²) = ٩ فإن ن(س) = ...



ثانياً :- حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات غير المنتهية والتمثيل البياني له .

١ حاصل الضرب الديكارتي "ط × ط" أو "ط²"

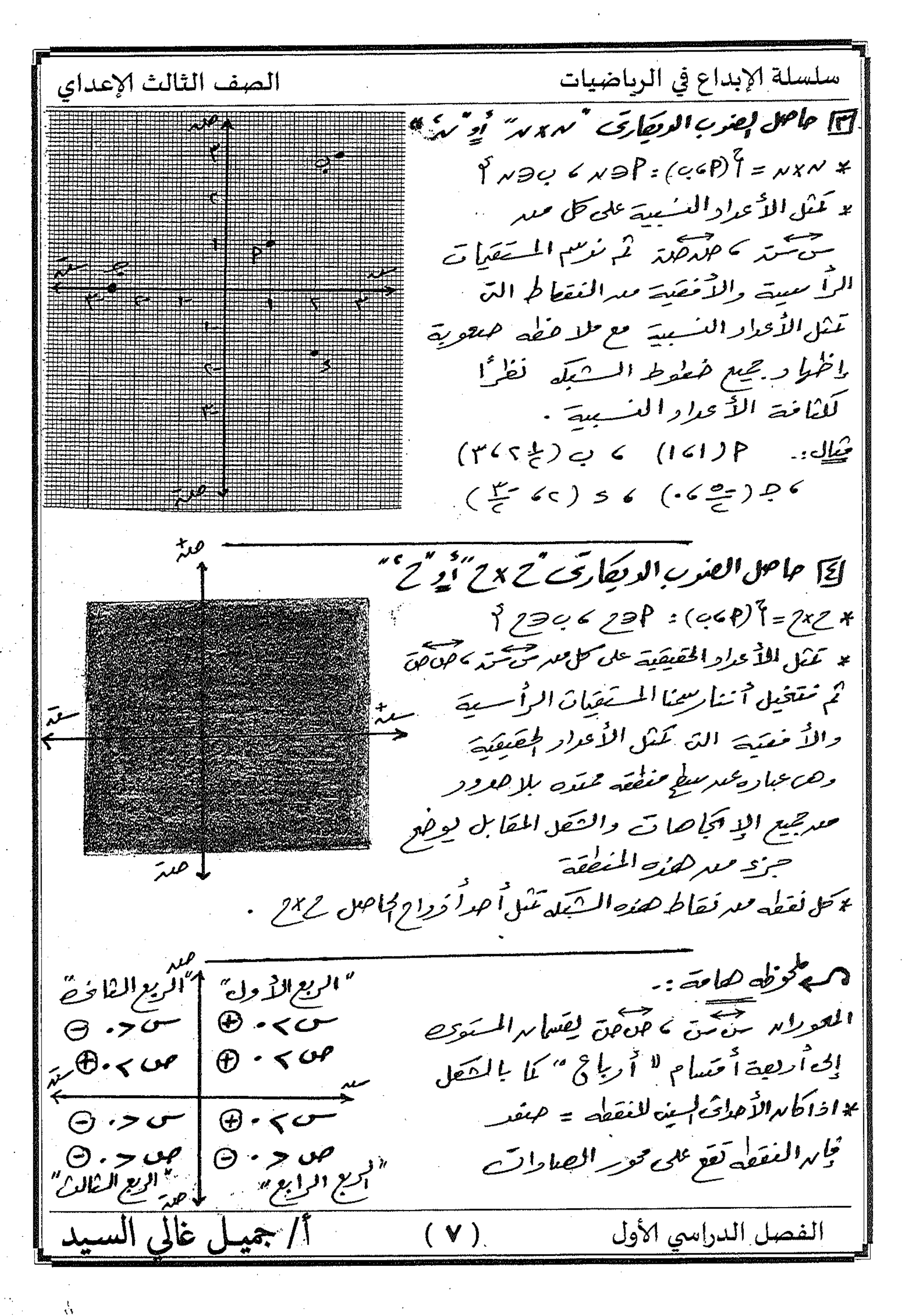
* ط × ط = { (أ ، ب) : أ ∈ ط ، ب ∈ ط }
* تمثل الأعداد الطبيعية على مستقيمين متعامدين أحدهما أفقي س س′ والآخر رأسي ص ص′ يتقاطعان في النقطة التي تمثل العدد صفر على كل منهما أي و (٠ ، ٠)
* نرسم مستقيمات رأسية ومستقيمات أفقية من النقط التي تمثل الأعداد الطبيعية على كل من س س′ ، ص ص′
* نحصل على الشبكة التربيعية المتعامدة لحاصل الضرب الديكارتي ط × ط "كما بالشكل"
* كل نقطة من النقط على الشبكة التربيعية تمثل زوج مرتب من الحاصل ط × ط

مثال :- أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)

٢ حاصل الضرب الديكارتي "ص × ص" أو "ص²"

* ص × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ ص ، ب ∈ ص }
* تمثل الأعداد الصحيحة على كل من س س′ ، ص ص′
* نرسم المستقيمات الرأسية والأفقية من النقط والتي تمثل الأعداد الصحيحة
* نحصل على الشبكة التربيعية المتعامدة لحاصل الضرب الديكارتي ص × ص
* كل نقطة من النقط على الشبكة التربيعية تمثل زوج مرتب من الحاصل ص × ص

مثال :- أ (١ ، ١) ، ب (-٢ ، ٣) ، جـ (-٣ ، -١) ، د (٤ ، -٢)
هـ (٠ ، -٣) ، و (٠ ، ٠)



٣ حاصل الضرب الديكارتي "ن × ن" أو ن²

* ن × ن = {(أ ، ب) : أ ∈ ن ، ب ∈ ن}
* تمثل الأعداد النسبية على كل من $\overleftrightarrow{سس}$ ، $\overleftrightarrow{صص}$ ثم نرسم المستقيمات الرأسية والأفقية من النقاط التي تمثل الأعداد النسبية مع ملاحظة صعوبة إظهار جميع خطوط الشبكة نظراً لكثافة الأعداد النسبية.

مثال: أ (١ ، ١) ، ب ($2\frac{1}{2}$ ، ٣) ، ج ($\frac{-5}{2}$ ، ٠) ، د (٢ ، $\frac{-3}{2}$)

٤ حاصل الضرب الديكارتي "ح × ح" أو ح²

* ح × ح = {(أ ، ب) : أ ∈ ح ، ب ∈ ح}
* تمثل الأعداد الحقيقية على كل من $\overleftrightarrow{سس}$ ، $\overleftrightarrow{صص}$ ثم نتخيل أننا رسمنا المستقيمات الرأسية والأفقية التي تمثل الأعداد الحقيقية وهي عبارة عن سطح منطقة ممتدة بلا حدود من جميع الاتجاهات والشكل المقابل يوضح جزء من هذه المنطقة
* كل نقطة من نقاط هذه الشبكة تمثل أحد أزواج الحاصل ح × ح .

ملحوظة هامة :

المحوران $\overleftrightarrow{سس}$ ، $\overleftrightarrow{صص}$ يقسمان المستوى إلى أربعة أقسام "أرباع" كما بالشكل

* إذا كان الإحداثي السيني للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات

* إذا كان الإحداثي الصادي للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات

مثال ①: أذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تقع عليه كل من النقط الآتية ثم عينها موضحها على الشبكة التربيعية

أ(٢، ٥) ، ب(٣، -٣) ، جـ(٤، ١) ، د(-٢، -٤)

هـ(-٢، ٥) ، س(٠، ٤) ، ص(-٣، ٠) ، ع(٥، ٠)

الحل :-

أ تقع في الربع الأول .

ب تقع في الربع الرابع .

جـ تقع في الربع الأول .

د تقع في الربع الثالث .

هـ تقع في الربع الثاني .

س تقع على محور الصادات .

ص تقع على محور السينات .

ع تقع على محور السينات .

---

* تدريب * أكمل الجدول التالي :-

النقطة	(-٣، ٥)	(٢، -١)	(٥، ½)	(-½، -٢½)	(٠، ٥)	(-٤، ٠)
الربع أو المحور	....	....	....	....	....	....

تمارين على " حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات غير المنتهية وتمثيله "

[١] أكمل ما يأتي :-

١- (٥ ، ٣) تقع في الربع ......

٢- (٤ ، -٣) تقع في الربع ......

٣- إذا كانت (س ، ٧) تقع على محور الصادات فإن س + ١ = ...

٤- الزوج المرتب (س ، ٥) حيث س ≠ ٠ يقع في الربع ......

٥- إذا كان (س + ٥ ، ٨) = (١٦ ، ص + ٥) فإن ص = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة :-

١- إذا كان (أ - ٤ ، ٨) تقع على محور الصادات فإن أ = ...
(٤ ، -٨ ، ٠ ، ١٦)

٢- إذا كان (٣ ، ب + ٦) تقع على محور السينات فإن ب = ...
(٠ ، -٦ ، -٣ ، ١)

٣- إذا كانت النقطة (س - ٢ ، س - ٤) تقع في الربع الرابع فإن س = ...
(٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

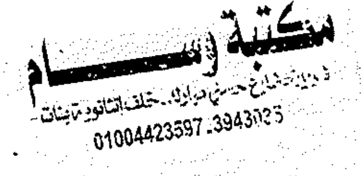
٤- إذا كان (س ، ص) تقع في الربع الثالث فإن (س ، ص) تقع في ......
(الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع)

[٣] على شبكة تربيعية متعامدة للحاصل الديكارتي ح × ح عين النقط الآتية :-

أ (٤ ، ٥) ، ب (٦ ، -٣) ، جـ (-٥ ، ٧) ، د (-١ ، ٦) .

هـ (-٤ ، -٥) ، م (٠ ، ٦) ، ل (٩ ، ٠)

ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من هذه النقاط .

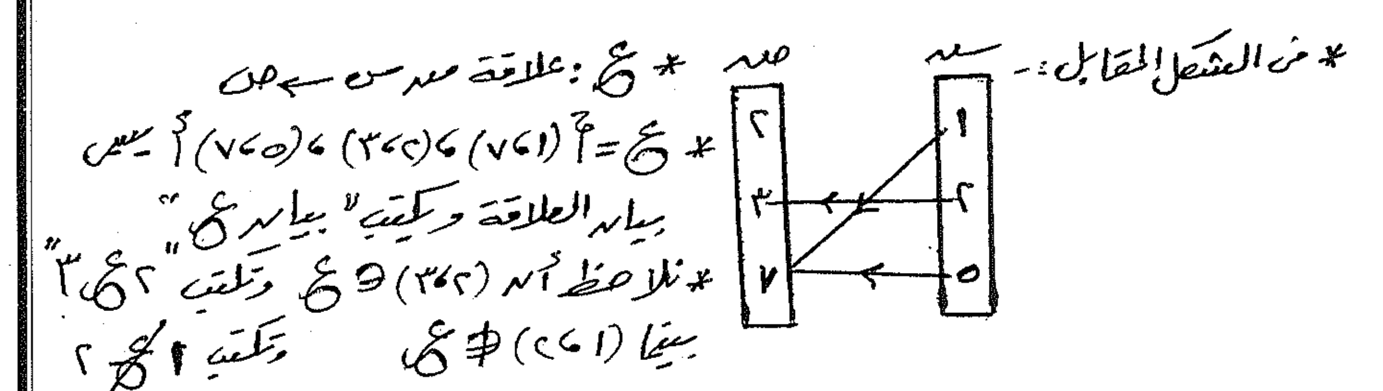


(٢) العلاقات

تعريف العلاقة :-

العلاقة من س إلى ص هو ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص وهو مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي "س × ص"

* بيان العلاقة :- هو جميع الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة .



* من الشكل المقابل :- * ع : علاقة من س ← ص
* ع = {(١، ٧)، (٢، ٣)، (٥، ٧)} يسمى بيان العلاقة ويكتب "بيان ع"
* نلاحظ أن (٢، ٣) ∈ ع وتكتب "٢ ع ٣" بينما (١، ٢) ∉ ع وتكتب ١ ع̸ ٢

مثال ① :-

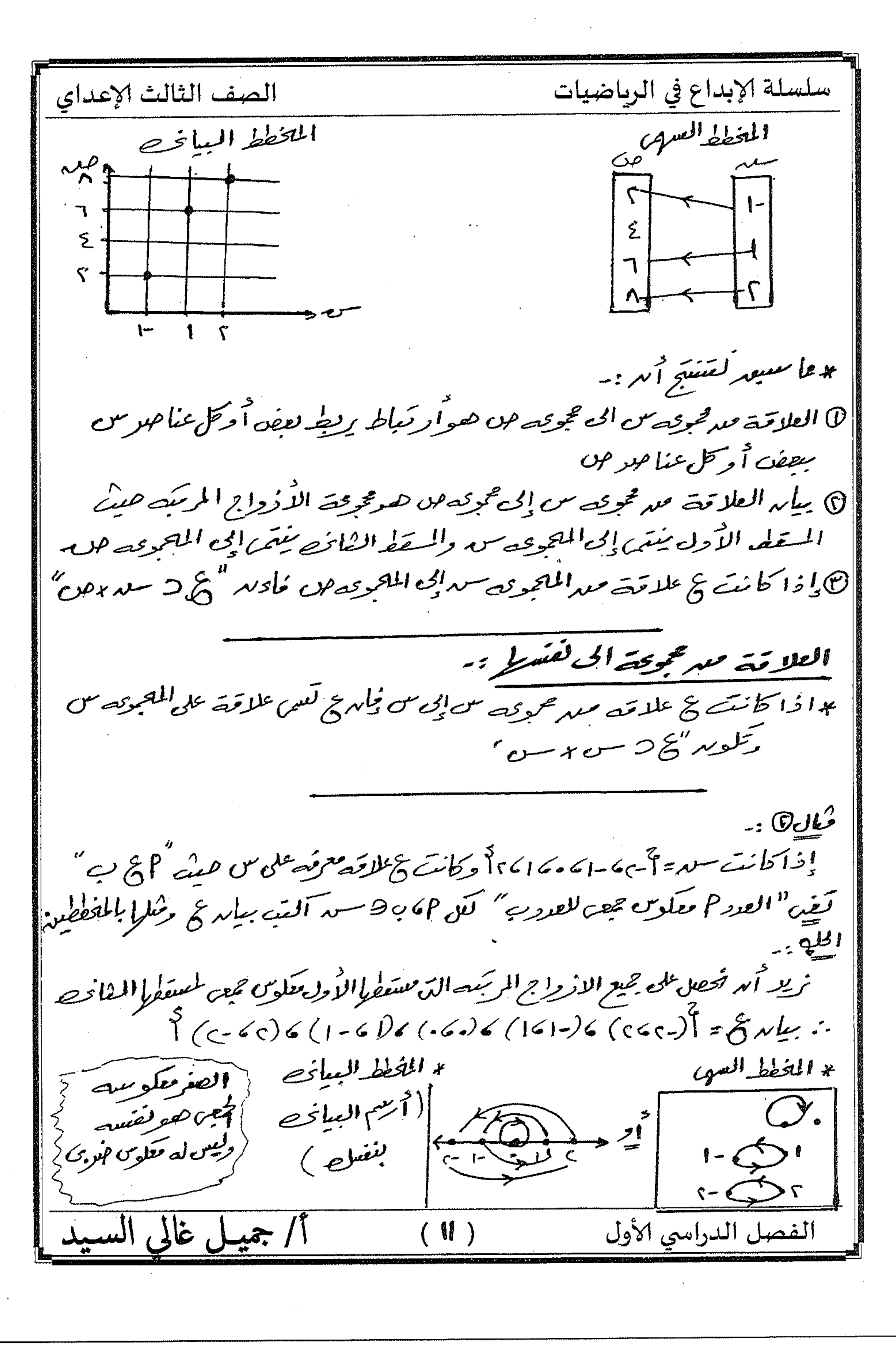
إذا كانت س = {-١، ١، ٢}، ص = {٢، ٤، ٦، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أن "ب = ٢أ + ٤" لكل أ ∈ س، ب ∈ ص
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني .

الحل :-

∵ ب = ٢أ + ٤

* عندما أ = -١ ⇐ ب = ٢ × -١ + ٤ = -٢ + ٤ = ٢ ∈ ص ⇐ (-١، ٢) ∈ ع
* عندما أ = ١ ⇐ ب = ٢ × ١ + ٤ = ٢ + ٤ = ٦ ∈ ص ⇐ (١، ٦) ∈ ع
* عندما أ = ٢ ⇐ ب = ٢ × ٢ + ٤ = ٤ + ٤ = ٨ ∈ ص ⇐ (٢، ٨) ∈ ع

∴ بيان ع = {(-١، ٢)، (١، ٦)، (٢، ٨)}



* مما سبق نستنتج أن :-

① العلاقة من مجموعة س الى مجموعة ص هو ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص

② بيان العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هو مجموعة الأزواج المرتبة حيث المسقط الأول ينتمي إلى المجموعة س والمسقط الثاني ينتمي إلى المجموعة ص

③ إذا كانت ع علاقة من المجموعة س الى المجموعة ص فإن "ع ⊂ س × ص"

العلاقة من مجموعة الى نفسها :-

* اذا كانت ع علاقة من مجموعة س إلى س فإن ع تسمى علاقة على المجموعة س وتكون "ع ⊂ س × س"

مثال ③ :-

إذا كانت س = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢} وكانت ع علاقة معرفة على س حيث "أ ع ب" تعني "العدد أ معكوس جمعي للعدد ب" لكل أ ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بالمخططين

الحل :-

نريد أن نحصل على جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول معكوس جمعي لمسقطها الثاني

∴ بيان ع = {(-٢ ، ٢) ، (-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، -١) ، (٢ ، -٢)}

* المخطط السهمي

* المخطط البياني

(أرسم البياني بنفسك)

الصفر معكوسه الجمعي هو نفسه وليس له معكوس جمعي آخر

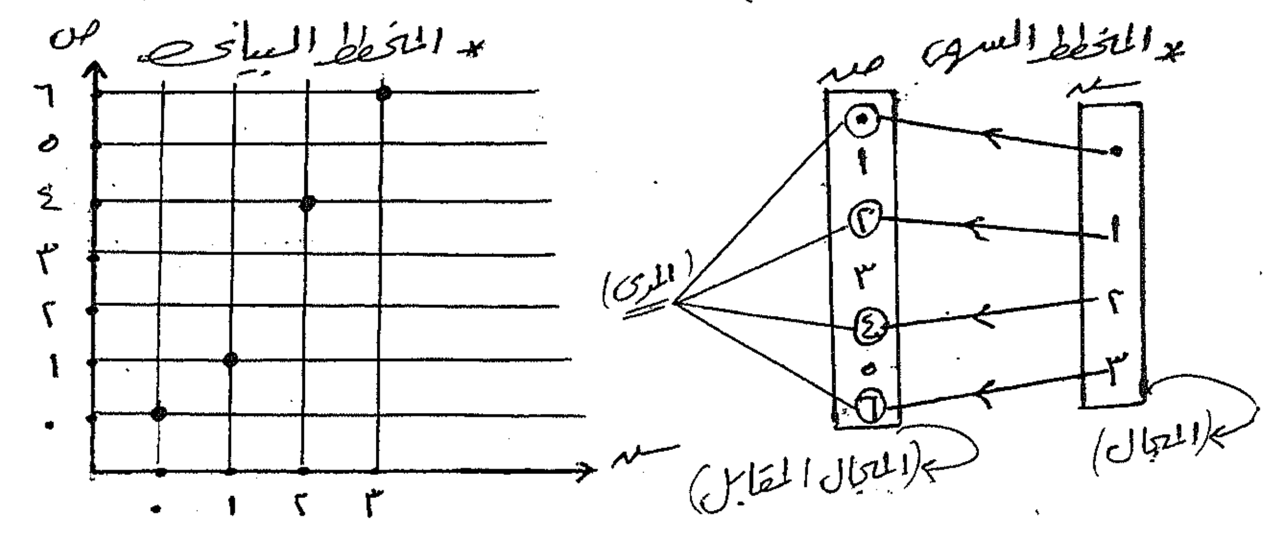
* "الدالة" :-

مثال ③ :- إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني "أ = ½ ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني .

الحل :-

نريد أن نحصل على جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول نصف مسقطها الثاني

∴ بيان ع = { (٠ ، ٠) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }



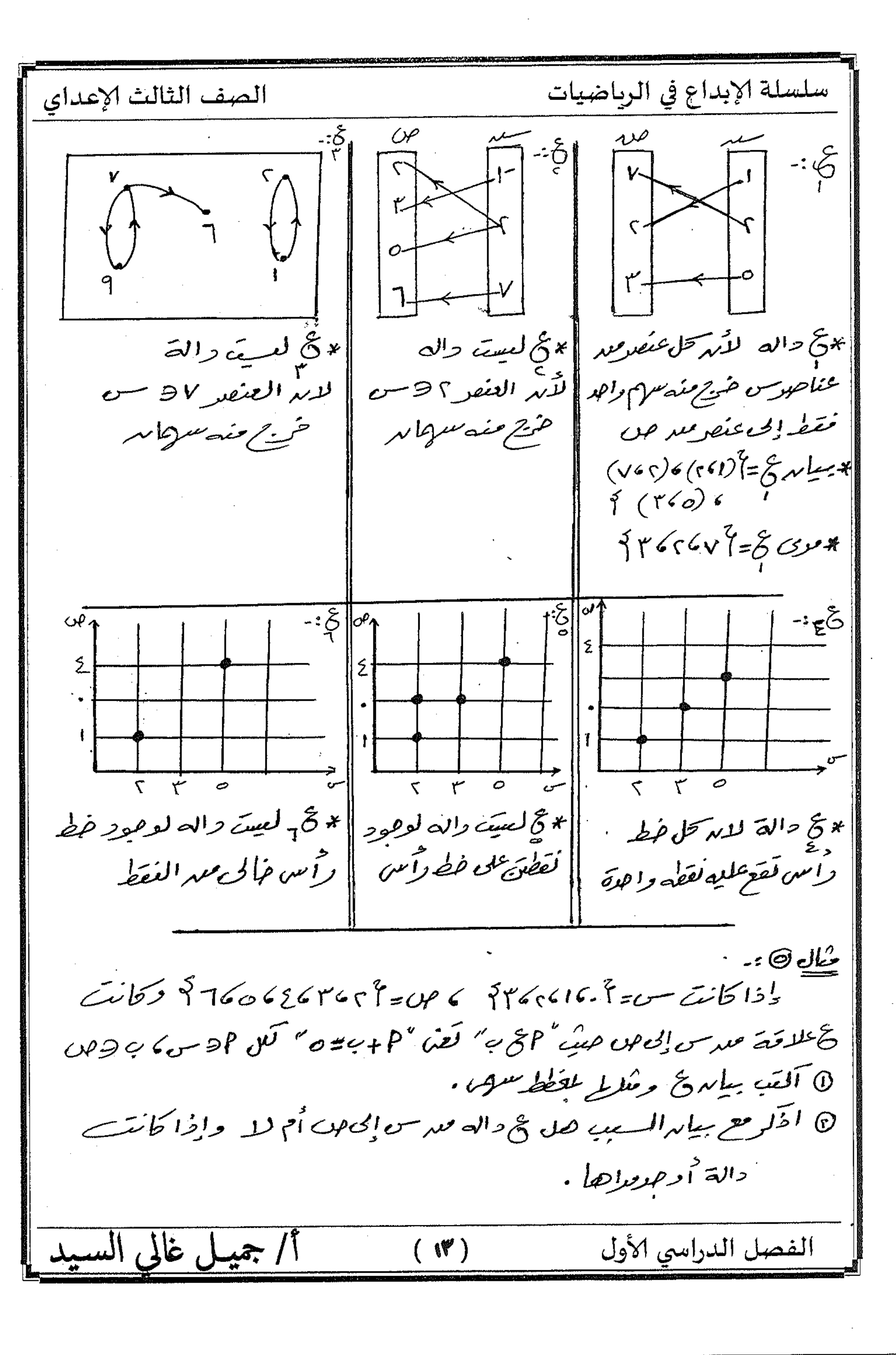
* من المثال السابق :-

① كل عنصر من عناصر س قد ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص مثل هذه العلاقة تسمى "دالة" أو "تطبيق"

② المجموعة س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } تسمى "المجال" ، المجموعة ص تسمى "بالمجال المقابل" مجموعة الصور { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } تسمى "بالمدى" وهي مجموعة جزئية من المجال المقابل

مثال ④ :-

من كل من الأشكال الآتية بين أي العلاقات الآتية دالة وأيها ليست دالة وإذا كانت دالة أذكر مداها .



ع١ :-

* ع١ دالة لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط إلى عنصر من ص
* بيان ع١ = {(١،٢)، (٢،٧)، (٥،٣)}
* مدى ع١ = {٧، ٢، ٣}

ع٢ :-

* ع٢ ليست دالة لأن العنصر ٢ ∈ س خرج منه سهمان

ع٣ :-

* ع٣ ليست دالة لأن العنصر ٧ ∈ س خرج منه سهمان

ع٤ :-

* ع٤ دالة لأن كل خط رأسي تقع عليه نقطة واحدة

ع٥ :-

* ع٥ ليست دالة لوجود نقطتين على خط رأسي

ع٦ :-

* ع٦ ليست دالة لوجود خط رأسي خالي من النقط

مثال ⑤ :-

إذا كانت س = {٠، ١، ٢، ٣}، ص = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني "أ + ب = ٥" لكل أ ∈ س، ب ∈ ص

① اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي.

② اذكر مع بيان السبب هل ع دالة من س إلى ص أم لا وإذا كانت دالة أوجد مداها.

الحل :-

نريد أن نحصل على جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ∈ س ومسقطها الثاني ∈ ص ومجموعهم (٥)

∴ بيان ع = {(٠، ٥) ، (١، ٤) ، (٢، ٣) ، (٣، ٢)}

* ع تمثل دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

* تدريب *

* إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني "أ + ب = ٧" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بياني واذكر هل ع دالة أم لا وإذا كانت دالة أوجد مداها.

تمارين على "العلاقة - الدالة"

[١] أي من العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص وإذا كانت دالة اذكر مداها :-

(أ) (ب) (ج)

[٢] إذا كانت س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} وكانت ع علاقة على س تعني أن "أ ضعف ب" لكل أ ، ب ∈ س . أوجد بيان ع ومثلها بالمخطط السهمي وهل ع دالة أم لا مع ذكر السبب وهل ٢ ع ٤ وأوجد س إذا كان ٦ ع س

[٣] إذا كانت س = {٠، ١، ٤، ٧} ، ص = {١، ٣، ٥، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أن "أ + ب < ٨" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
اكتب بيان ع ممثلاً بالمخطط السهمي وهل ع دالة أم لا ولماذا ؟

[٤] إذا كانت س = {٢، ٤، ٥، ٧} ، ص = {٤، ٥، ٦، ٧، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث "أ ع ب" تعني أن "أ > ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني

٥ إذا كانت س = {-٢ ، -١ ، ١ ، ٢} ، ص = {١/٨ ، ١/٢ ، ١ ، ٣ ، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أن "$أ^{٣}$ = ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . اكتب بيان ع ومثلها بالمخطط السهمي .

٦ إذا كانت س = {٢ ، ٥ ، ٨} ، ص = {١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أن "أ عامل من عوامل ب" أي "أ تقسم ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . اكتب بيان ع ومثلها بالمخطط سهمي وآخر بياني وهل ع دالة أم لا ولماذا ؟

٧ اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠} وكانت ع علاقة على س حيث "أ ع ب" تعني أن "أ مضاعف ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص"
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بياني وهل ع دالة أم لا ولماذا ؟

٨ إذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٢} ، ع دالة على س ، بيان ع = {(١ ، أ) ، (ب ، ٠) ، (٢ ، ٠)} أوجد القيمة العددية للمقدار أ + ب .

٩ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ١/٢ ، ١/٣ ، ١/٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني "أ هو المعكوس الضربي لـ ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بياني .

١٠ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١} وكانت ع علاقة على س حيث "أ ع ب" تعني "أ + ٢ب = عدد فردي" لكل أ ∈ س ، ب ∈ س . اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا ولماذا ؟ .

١١ في الشكل المقابل :-
يمثل المخطط السهمي للعلاقة ع المعرفة على المجموعة س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}
اكتب بيان ع ومثلها بالمخطط بياني .

(٣) "دوال كثيرات الحدود"

* مثال تمهيدي :- إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١}
وكانت ع علاقة من س ← ص تعني أن "ص = ٢ س + ١" لكل س ∈ س ، ص ∈ ص فإذا رسمنا المخطط السهمي نجد أن العلاقة تمثل دالة من س : ص وتكتب د : س ← ص
أو د(س) = ٢ س + ١ أي أن الدالة ترسم س إلى ص
وهنا نجد أن د : ٢ ← ٥ أي أن الدالة ترسم ٢ إلى ٥
والمجال هو س والمجال المقابل هو ص والمدى هو {٥ ، ٧ ، ١١} .

(مخطط سهمي: س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١} ؛ ٢ ← ٥ ، ٣ ← ٧ ، ٤ ← ٩)

---

* ملحوظة :- إذا كانت الدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٢ س - ٣
هنا نقول أن مجال الدالة ح ومجالها المقابل ح وتسمى ٢ س - ٣ "بقاعدة الدالة"

---

* دوال كثيرات الحدود :-
هي دوال تتكون من حد أو أكثر ويكون أس كل حد عدد طبيعي ومجالها ح ومجالها المقابل ح وتكون قاعدتها على الصورة :-
$د : د(س) = P_0 + P_1 س + P_2 س^2 + P_3 س^3 + \dots\dots + P_ن س^ن$
حيث $P_0 ، P_1 ، P_2 ، \dots$ أعداد حقيقية ، ن ∈ ط .

* درجة الدالة كثيرة الحدود :-
هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة .

مثال ①:-
حدد أي من الدوال الآتية كثيرة حدود ، وإذا كانت كثيرة حدود أوجد درجتها :-

① $د(س) = ٤ س^2 + ٥ س + ٥$
② $د(س) = ٧ - ٢ س^3 + ٣ س^{\frac{٤}{٣}}$ (كما يبدو: $٧ - ٢ س^٣ + ٣ س^٤$)
③ $د(س) = س^{\frac{١}{٢}} + ٥ س + ١$
④ $د(س) = ٧ س$
⑤ $د(س) = \frac{١}{س} - ٥ س^2$
⑥ $د(س) = س^2 + ٢ س + \frac{١}{٢}$
⑦ $د(س) = ٤ س^{-٣} + ٥ س + ٢$
⑧ $د(س) = ٥$
⑨ $د(س) = صفر$

الحل :-

① دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية وتسمى " دالة تربيعية " .

② دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة .

③ دالة ليست كثيرة حدود لأن الأس لا ينتمي إلى ط " الأس كسر " .

④ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى وتسمى " دالة خطية " .

⑤ دالة ليست كثيرة حدود لأن $\sqrt{س} = س^{\frac{1}{2}}$ أى " الأس كسر " .

⑥ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية .

⑦ دالة ليست كثيرة حدود لأن الأس لا ينتمي إلى ط " $-3 \notin ط$ "

⑧ داله كثيرة حدود من الدرجة الصفرية وتسمى " داله ثابته "

⑨ داله كثيرة حدود من الدرجة الصفرية وتسمى " داله ثابته "

تدريب : اذكر أى من الدوال الآتية كثيرة حدود وإذا كانت كثيرة حدود أوجد درجتها

① $د(س) = ٥ س^٤ + ٢ س + ١$

② $د(س) = ٥ س - ١$

③ $د(س) = \sqrt{س} + س^٣ + ١$

④ $د(س) = ٨ س + \frac{١}{س^٢} + ٣$

⑤ $د(س) = س (س - ٢)^٢$

⑥ $د(س) = \frac{١}{س} + س^٥$

مثال ② :-

إذا كانت $د(س) = س^٢ - ٤$ أوجد :- $د(١)$ ، $د(٠)$ ، $د(\sqrt{٥})$

الحل :-

① بوضع س = ١ ⇐ $د(١) = (١)^٢ - ٤ = ١ - ٤ = -٣$

② بوضع س = ٠ ⇐ $د(٠) = (٠)^٢ - ٤ = ٠ - ٤ = -٤$

③ بوضع $س = \sqrt{٥}$ ⇐ $د(\sqrt{٥}) = (\sqrt{٥})^٢ - ٤ = ٥ - ٤ = ١$

مثال ③ :-

إذا كانت د داله كثيرة حدود حيث $د(س) = س^٢ - ٢ س + ٥$

① أوجد $د(-٢)$ ، $د(\frac{١}{٢})$ ② أثبت أن $د(٢\sqrt{٢} + ١) = ٢ د(١ - \sqrt{٢})$

الحل :-

① * بوضع س = -٢ ⟸ د(-٢) = ٤ + ٤ + ٥ = ١٣ .

* بوضع س = ½ ⟸ د(½) = ¼ - ١ + ٥ = ٤ ¼ .

②

* الطرف الأيمن :- بوضع س = ٢√٢ + ١ ⟸ د(٢√٢ + ١) = (٢√٢ + ١)² - ٢(٢√٢ + ١) + ٥

⟸ د(٢√٢ + ١) = ٨ + ٤√٢ + ١ - ٤√٢ - ٢ + ٥ = ١٢ ⟵ (أ)

* الطرف الأيسر :- بوضع س = ١ - √٢ ⟸ د(١ - √٢) = (١ - √٢)² - ٢(١ - √٢) + ٥

⟸ د(١ - √٢) = ١ - ٢√٢ + ٢ - ٢ + ٢√٢ + ٥ = ٦

∴ ٢ د(١ - √٢) = ٢ × ٦ = ١٢ ⟵ (ب)

من (أ) ، (ب) ينتج أن

د(٢√٢ + ١) = ٢ د(١ - √٢) #

تمارين على " دوال كثيرات الحدود "

[1] أكمل ما يأتي :-

① الدالة د(س) = ٥س² + ٧ كثيرة حدود من الدرجة ....

② الدالة د(س) = س² (س + ٢) كثيرة حدود من الدرجة ....

③ إذا كانت د(س) = س² - س + ٣ فإن د(-٢) = ...

④ إذا كانت د(س) = س - ٤ كثيرة حدود فإن د(٧) = ... ، مجال د = ...

⑤ إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦} وكانت د : س ← ح ، د(س) = ٢س + ٣ فإن مدى الدالة = ...

⑥ إذا كانت د(س) = س² فإن د(٢) + د(-٢) = ...

⑦ إذا كان (-١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ٣س + م فإن م = ...

⑧ إذا كانت د(س) = أس + ٦ ، د(٢) = ٣ فإن أ = ...

⑨ الدالة د(س) = (س - ٥)³ كثيرة حدود من الدرجة ....

⑩ إذا كانت د(س) = س - ٥ وكان ½ د(أ) = ٣ فإن أ = ...

٢ أي من الدوال الآتية تمثل كثيرة حدود وإذا كانت كثيرة حدود أذكر درجتها

① $د(س) = ٢س - ٥$
② $د(س) = ٢$
③ $د(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٣$
④ $د(س) = س^{٢} + \sqrt{س} + ٨$
⑤ $د(س) = \sqrt[٣]{س} + ٨$
⑥ $د(س) = س(س + \frac{١}{س} - ١)$

---

٣ إذا كانت $د(س) = ٢س^{٢} - ٥س + ٢$

اذكر درجة الدالة د ، اثبت أن $د(٢) = د(\frac{١}{٢})$

٤ إذا كانت $د(س) = س^{٢} - ٣س$ ، $ر(س) = س - ٣$ أوجد :-

① $د(\sqrt{٢}) + ٣ ر(\sqrt{٢})$ ثم ② أثبت أن $د(٣) = ر(٣) = صفر$

دراسة لبعض دوال كثيرات الحدود والتمثيل البياني لها *

أولاً :- الدالة الخطية :-

* الدالة $د : ح \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = أ س + ب$ ، $أ \in ح^{*}$ ، $ب \in ح$ تسمى دالة خطية " من الدرجة الأولى "

* أمثلة لدوال خطية :-

$د(س) = ٢س + ١$ ، $د(س) = ٣ - \frac{١}{٢}س$ ، $د(س) = ٢س$

* التمثيل البياني للدالة الخطية :-

تمثل الدالة الخطية بخط مستقيم يقطع :-

Ⓐ محور الصادات في النقطة $(٠ ، ب)$ ثم Ⓑ محور السينات في النقطة $(\frac{-ب}{أ} ، ٠)$

أو

* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع $د(س) = ص = صفر$.
* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع $س = صفر$.

مثال ① :-

مثل بيانياً كل من الدالتين :- ① $د(س) = ٢س - ٣$ ثم ② $د(س) = \frac{١}{٣}س$

الحل :-

① د(س) = ٢س − ٣

نعين ثلاث أزواج مرتبة تنتمي إلى بيان الدالة ويمكن كتابتها في جدول كالتالي

ل١ :

س	٠	١	٢
د(س) = ص	−٣	−١	١

* نمثل هذه النقط على الشبكة التربيعية
* المستقيم الذي أمامنا هو التمثيل البياني للدالة

ملحوظة :- يمكن إيجاد نقطتي التقاطع مع المحورين :-

∵ د(س) = ٢س − ٣ ⇐ أ = ٢ ، ب = −٣

① نقطة التقاطع مع محور الصادات = (٠ ، ب) = (٠ ، −٣) .

② نقطة التقاطع مع محور السينات = $(\frac{-ب}{أ} ، ٠)$ = $(\frac{٣}{٢} ، ٠)$.

يمكن تمثيل الخط المستقيم الممثل للدالة بمعرفة النقطتين دون عمل الجدول

② د(س) = $\frac{١}{٣}$ س

ل٢ :

س	٠	٣	٦
د(س)	٠	١	٢

ملحوظة :-

الدالة د : ح ← ح حيث د(س) = أ س

، أ ∈ ح* "ح − {٠}" أي أنه عندما ب = صفر

فإنها تمثل الخط مستقيم يمر بنقطة الأصل .

---

* تدريب * مثل بيانيا الدالة د : د(س) = ٢س − ٣

ثم أوجد نقطتي التقاطع مع المحورين .

ثانياً :- الدالة الثابتة :-

* الدالة د : ح ⟵ ح حيث د(س) = ب ، ب ∈ ح تسمى دالة ثابتة " من الدرجة صفر " أى أنه د(س) = عدد ، وترسم بخط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ب)

مثال ① :- مثل بيانياً على شبكة تربيعية واحدة الدالتين الآتيتين :-

أ - د(س) = ٤ ، ب - ر(س) = -٣

الحل :-

أ - نرسم مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٤)

ب - نرسم مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، -٣)

ملحوظة :- الدالة د(س) = صفر تمثل الخط مستقيم منطبق على محور السينات .

مثال ② :- إذا كانت الدالة د حيث د(س) = ٦س - أ يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمة ٢أ + ٧ب .

الحل :-

∵ المستقيم الممثل للدالة يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) ⟸ ب = صفر "الإحداثي السيني"

بالتعويض بالنقطة (٠ ، ٣) في معادلة المستقيم

⟸ ٣ = ٦ × ٠ - أ ⟸ ٣ = ٠ - أ ⟸ ٣ = -أ ⟸ أ = -٣

∴ قيمة ٢أ + ٧ب = ٢ × -٣ + ٧ × ٠ = -٦ + ٠ = -٦

مثال ③ :- إذا كانت الدالة د حيث د(س) = ٣س - ١ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٢) أوجد قيمة أ

الحل :- بالتعويض بالنقطة في الدالة ⟸ ٢ = ٣أ - ١ ⟸ ٣ = ٣أ ⟸ (÷٣) أ = ١

ثالثاً: الدالة التربيعية :-

* الدالة د(س) = أس² + ب س + جـ حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠ تسمى دالة تربيعية "من الدرجة الثانية"

أمثلة :-

د(س) = س² ، د(س) = ٤ - س² ، د(س) = ٣س² - ٢س + ١

* تمثل الدالة التربيعية على فترة معينة عن طريق تعيين بعض الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيان الدالة ثم نرسم منحنى يمر بهذه النقاط .

مثال ①:-

مثل بيانياً كلا من الدالتين الآتيتين :-

ⓐ د(س) = س² متخذاً س ∈ [-٣ ، ٣]

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

ⓑ د(س) = - س² متخذاً س ∈ [-٣ ، ٣]

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤	-٩

*** معامل $س^2$ > الصفر**

- المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات أي أن محور الصادات هو محور تماثل المنحنى ومعادلته س = ٠
- النقطة (٠، ٠) هي نقطة رأس المنحنى وهي نقطة قيمة صغرى لأن المنحنى يقع بأكمله فوق س.
- القيمة الصغرى للدالة هي صفر وهي الأحداثي الصادي لنقطة رأس المنحنى

*** معامل $س^2$ < الصفر**

- المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات أي أن محور الصادات هو محور تماثل المنحنى ومعادلته س = ٠
- النقطة (٠، ٠) هي نقطة رأس المنحنى وهي نقطة قيمة عظمى لأن المنحنى يقع بأكمله تحت س
- القيمة العظمى للدالة هي صفر وهي الأحداثي الصادي لنقطة رأس المنحنى

ملاحظات هامة :-

١- إذا كان معامل $س^2$ موجب فإن المنحنى يكون مفتوحاً لأعلى ويكون له نقطة قيمة صغرى.

٢- إذا كان معامل $س^2$ سالب فإن المنحنى يكون مفتوحاً لأسفل ويكون له نقطة قيمة عظمى.

٣- إذا كانت نقطة رأس المنحنى (أ، ب) فإن معادلة محور التماثل هي **س = أ** والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة تساوي ب "وذلك حسب معامل $س^2$"

مثال ② :-

ارسم منحنى الدالة د(س) = $س^2$ − ٢س − ٣ في الفترة [−٢، ٤] ومن الرسم أوجد:

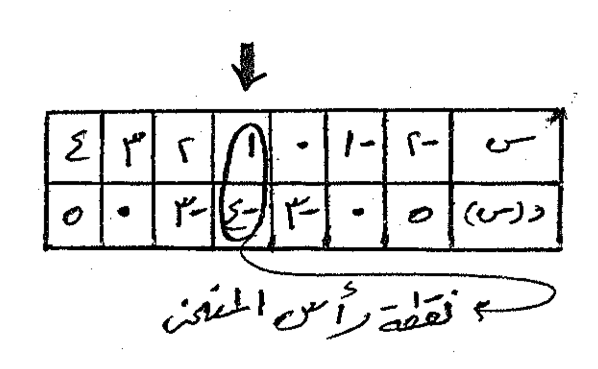
١- نقطة رأس المنحنى وحدد إذا كانت نقطة قيمة عظمى أو صغرى.

٢- ارسم محور التماثل للدالة واكتب معادلته.

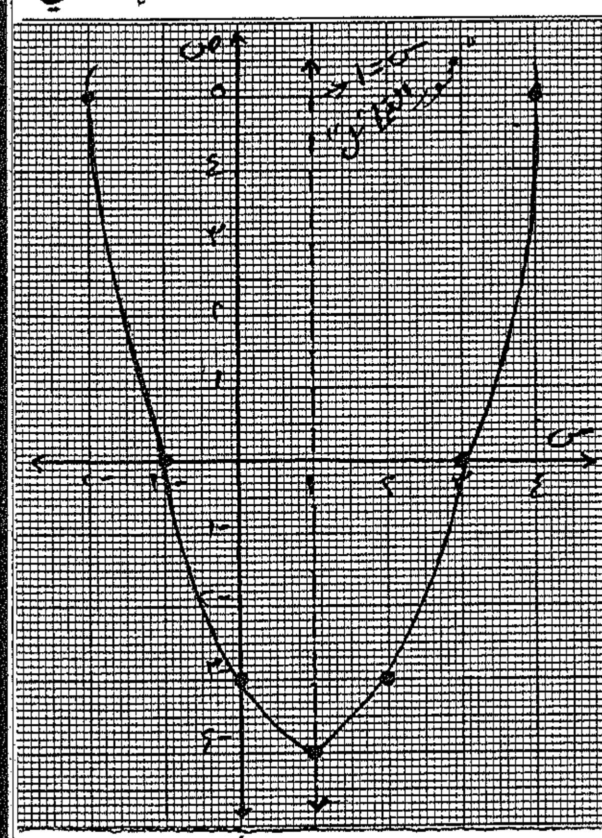
٣- أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

الحل :-

∵ د(س) = $س^2$ − ٢س − ٣



س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥



* من الرسم نجد أن :-
- نقطة رأس المنحنى هي $(1 ، -4)$ "صغرى"
- معادلة محور التماثل هي س = 1
- القيمة الصغرى للدالة = -4

• محور التماثل هو مستقيم يوازي محور الصادات ويمر بنقطة رأس المنحنى.

مثال ③ :-

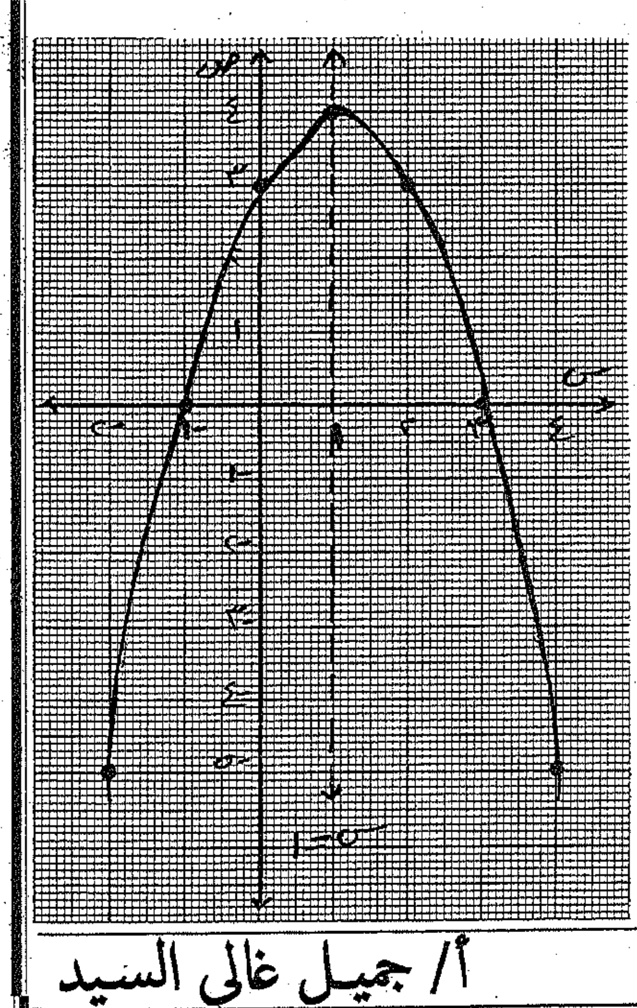
ارسم منحنى الدالة د(س) = 3 + 2 س - س^2 في الفترة [-2 ، 4] ومن الرسم أوجد:-
1- نقطة رأس المنحنى 2- القيمة العظمى أو الصغرى.
3- ارسم محور التماثل واكتب معادلته.

الحل :-

نعيد إعادة ترتيب الدالة كما يلي :-

د(س) = -س^2 + 2 س + 3

س	-2	-1	0	1	2	3	4
د(س)	-5	0	3	4	3	0	-5



* من الرسم نجد أن :-
- نقطة رأس المنحنى هي $(1 ، 4)$
- معادلة محور التماثل هي س = 1
- القيمة العظمى للدالة = 4

*** تدريب ***

ارسم منحنى الدالة د(س) = $(س-٣)^٢$ متخذاً س ∈ [٠ ، ٦] وبعد الرسم أوجد :- ① معادلة محور التماثل ② القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

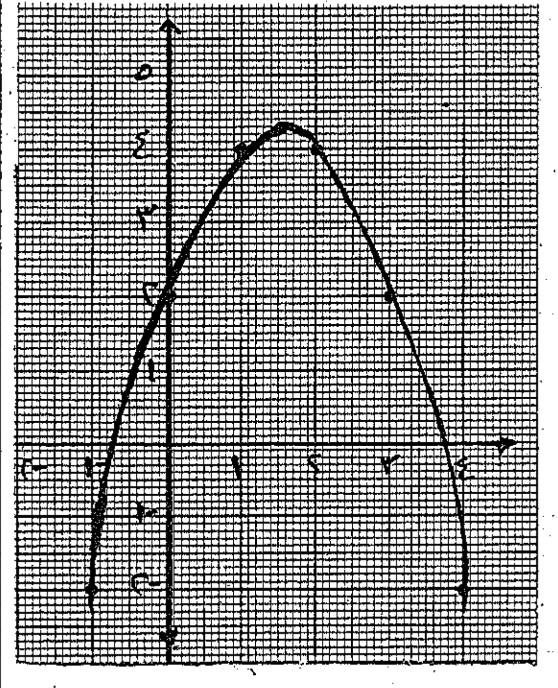
ملحوظة هامة :-

نقطة رأس المنحنى لأي دالة تربيعية تكون على الصورة :-

$\left(\frac{-ب}{٢م} ، د(\frac{-ب}{٢م}) \right)$ أي أن الإحداثي السيني = $\frac{-ب}{٢م}$ ، الإحداثي الصادي = $د(\frac{-ب}{٢م})$

حيث م معامل $س^٢$ ، ب معامل س .

مثال ④ :- ارسم منحنى الدالة د(س) = $-س^٢ + ٣س + ٢$ متخذاً س ∈ [-١ ، ٤] وبعد الرسم أوجد ① نقطة رأس المنحنى ② معادلة محور التماثل



الحل :-

س	-١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	-٢	٢	٤	٤	٢	-٢

* نلاحظ أن نقطة رأس المنحنى غير ظاهرة في الجدول كما في الأمثلة السابقة.

م = -١ ، ب = ٣

← إيجاد نقطة رأس المنحنى جبرياً :-

• الإحداثي السيني = $\frac{-ب}{٢م} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$

• الإحداثي الصادي = $د(\frac{-ب}{٢م})$

⇐ $د(\frac{٣}{٢}) = -(\frac{٣}{٢})^٢ + ٣(\frac{٣}{٢}) + ٢ = ٤\frac{١}{٤}$

∴ نقطة رأس المنحنى هي $(١\frac{١}{٢} ، ٤\frac{١}{٤})$

② معادلة محور التماثل هي س = $١\frac{١}{٢}$. ③ القيمة العظمى للدالة = $٤\frac{١}{٤}$.

تمارين على "بعض دوال كثيرات الحدود والتمثيل البياني لها"

[١] أكمل ما يأتي :-

① الدالة د(س) = ٥ يمثلها بيانياً خط مستقيم يوازي .... ويقطع محور الصادات في النقطة ....

② محور السينات هو التمثيل البياني للدالة د: ح ← ح حيث د(س) = ...

③ إذا كانت د(س) = ٥ فإن د(٥) ÷ د(١٠) = ...

④ إذا كانت النقطة (أ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د(س) = ٤س − ٥ فإن أ = ...

⑤ معادلة خط التماثل للدالة د(س) = س² هي ....

⑥ عند تمثيل د(س) = أس² + ب س + جـ حيث أ ∈ ح* فإن الإحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى = ... ، الإحداثي الصادي = ...

⑦ نقطة رأس المنحنى للدالة د: د(س) = ٢س² − ٤س + ٥ هي ....

⑧ إذا كانت (−١، ص) تنتمي إلى منحنى الدالة د: د(س) = س² + ١ فإن ص = ...

---

[٢] اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كانت د(س) = ٧ فإن د(٣) = ... [١٠ ، ٣ ، ٧ ، ٥]

② إذا كانت د(س) = ٥ فإن د(٣) − د(١) = ... [د(٢) ، ٢ ، ٠ ، ١٠]

③ إذا كانت د(س) = ٤ فإن د(−س) = ... [−٢ ، −٤ ، ٢ ، ٤]

④ د(س) = س² ، س ∈ [−٢ ، ٢] فإن د(س) ∈ ...... [[٠، ٤] ،]٠، ٤[، [٠، ٤[، [−٤، ٤]]

⑤ إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = س² − أ يمر بالنقطة (١، ٠) فإن أ = ... [±١ ، −١ ، ١ ، ٠]

⑥ الدالة د(س) = ٢س يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة .... [(٢، ٣) ، (٠، ٠) ، (٠، ٣) ، (٢، ٠)]

---

[٣] مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية حيث س ∈ ح :-

① د: د(س) = ٥ ② د: د(س) = −٤ ③ د: د(س) = صفر

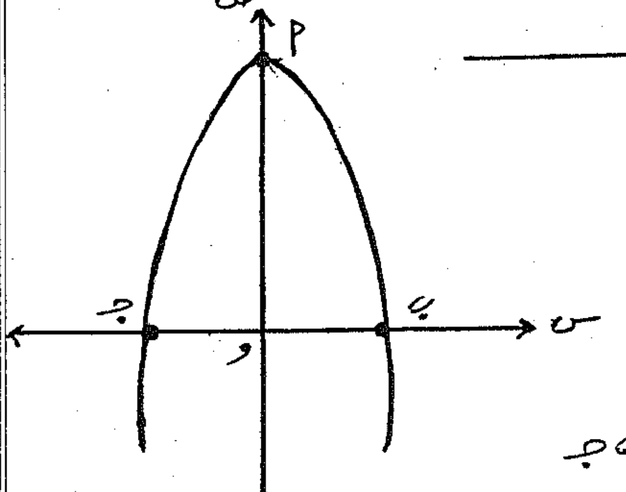
٤ مثل بيانياً كلاً من الدوال الخطية الآتية وأوجد نقطة تقاطع المستقيم الممثل لكل دالة مع محوري الإحداثيات حيث س ∈ ح :-

① د : د(س) = س + ٢
② د : د(س) = ٣ − س
③ د : د(س) = ٢ − س
④ د : د(س) = ٥ − $\frac{1}{2}$ س

---

٥ مثل بيانياً كل من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج إحداثي نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة حيث س ∈ ح :-

① د : د(س) = س^2 − ٢ متخذاً س ∈ [−٣ ، ٣]
② د : د(س) = س^2 − ٢س متخذاً س ∈ [−٢ ، ٤]
③ د : د(س) = س^2 + ٢س + ١ متخذاً س ∈ [−٤ ، ٢]
④ د : د(س) = (س − ٢)^2 متخذاً س ∈ [−١ ، ٥]
⑤ د : د(س) = ١ − ٣س + س^2 متخذاً س ∈ [−١ ، ٤]



٦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث د(س) = م − س^2 ، إذا كان أ و = ٤ وحدات أوجد :-

١- قيمة م .
٢- إحداثي ب ، جـ
٣- مساحة المثلث الذي رؤوسه أ ، ب ، جـ

اختبار الوحدة

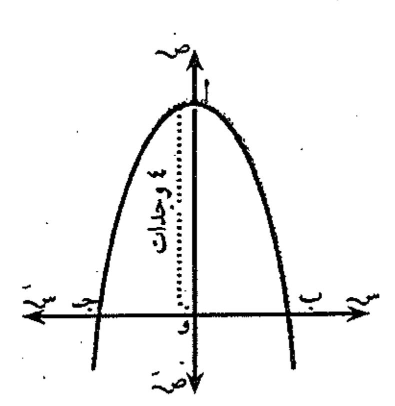
● إذا كانت سـ = {٠، ١، ٤، ٧}، صـ = {١، ٣، ٥، ٦} ، ع علاقة من سـ إلى صـ، حيث أ ع ب تعني:
«أ + ب < ٦» لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيان ع ومثِّلها بمخطط سهميٍّ وآخر بياني. هل ع دالة؟ اذكر السَّبب.

● مثل بيانيًا كلاًّ من الدوالّ الآتية:
- د (س) = ٣ س - ١
- د (س) = - ٢ س
- د (س) = س^{٢} - ٣ متخذاً س ∈ [- ٣ ، ٣]
- د (س) = ١ - ٣ س + س^{٢} متخذاً س ∈ [-١ ، ٤]

● أثناء قراءةِ كريم لكتاب وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له ٥٠ صفحة، وبعد ٦ ساعات تبقى له ٢٠ صفحة. فإذا كانت العلاقةُ بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) هي علاقة خطية:
- مثل العلاقة بين ن ، ص بيانيًّا ثم أوجدَ العلاقةَ الجبرية بينهما.
- ما الوقت الذي ينتهي فيه كريم من القراءة؟
- كم عدد صفحات الكتابِ المتبقية عندما بدأ كريم القراءة؟

● الشكلُ المقابلُ: يمثِّل منحنى الدالة د حيث:
د (س) = م - س^{٢}، إذا كان أ و = ٤ وحدات
أوجد:

- قيمة م.
- إحداثيي ب، جـ
- مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، جـ .



الوحدة الثانية :-

النسبه والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

(1) النسبة والتناسب

(2) التناسب المتسلسل

(3) التغير الطردى والتغير العكسى

اختبار الوحدة

" الوحدة الثانية "

(١) " النسبة والتناسب "

أولاً :- النسبة :-

هي إحدى طرق المقارنة بين كميتين

أو هي علاقة بين عددين أ ، ب وتكتب أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

وتقرأ أ إلى ب ويسمى أ بمقدم النسبة ، ويسمى ب بتالي النسبة ويسمى أ ، ب معاً حدي النسبة .

* " خواص النسبة " :-

① قيمة النسبة لا تتغير إذا ضرب حداها " في " أو قسما " على " عدد لا يساوي الصفر.

مثال :-

$\frac{٤}{٦} = \frac{٤ \times ③}{٦ \times ③} = \frac{١٢}{١٨}$ أو $\frac{٤}{٦} = \frac{٤ \div ٢}{٦ \div ٢} = \frac{٢}{٣}$

② قيمة النسبة تتغير إذا أضيف إلى حديها أو طرح منهما عدد حقيقي لا يساوي الصفر

مثال :-

$\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣+٧}{٥+٧}$ أو $\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣-٢}{٥-٢}$

ثانياً :- التناسب :-

هو تساوي نسبتين أو أكثر .

* إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة والعكس صحيح

ويسمى أ بالأول المتناسب . ، ب بالثاني المتناسب .

جـ بالثالث المتناسب . ، د بالرابع المتناسب .

ويسمى أ ، د بطرفي التناسب ، ب ، جـ بوسطي التناسب

مثال:- إذا كان ٣/٢ = ٩/٦ فإن ٣، ٢، ٩، ٦ كميات متناسبة

والعكس أي إذا كان ٣، ٢، ٩، ٦ كميات متناسبة فإن ٣/٢ = ٩/٦

* "خواص التناسب":-

(١) إذا كان أ/ب = جـ/د فإن أ × د = ب × جـ

أي "حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين"

مثال:-

إذا كان ٤/٣ = ٨/٦ ⟸ ٤ × ٦ = ٢٤، ٨ × ٣ = ٢٤ أي ٤ × ٦ = ٨ × ٣

مثال (١):-

(أ) أوجد الثاني المتناسب للكميات ٣، ١٥، ٢٠.

(ب) إذا كان ٢، س، ٦، ١٥ كميات متناسبة أوجد قيمة س.

(جـ) أوجد الرابع المتناسب للكميات ٥، ٣، ٢٥.

الحل

(أ) نفرض الثاني المتناسب = س

⟸ ٣، س، ١٥، ٢٠ كميات متناسبة

∴ ٣/س = ١٥/٢٠ ⟸ ١٥ س = ٣ × ٢٠

⟸ ١٥ س = ٦٠ ⟸(÷١٥) س = ٤

∴ الثاني المتناسب هو ٤.

(ب) ∵ ٢، س، ٦، ١٥ كميات متناسبة

∴ ٢/س = ٦/١٥ ⟸ ٦ س = ٢ × ١٥

⟸ ٦ س = ٣٠ ⟸(÷٦) س = ٥

(جـ) نفرض الرابع المتناسب = س ⟸ ٥، ٣، ٢٥، س كميات متناسبة

∴ ٥/٣ = ٢٥/س ⟸ ٥ س = ٧٥ ⟸(÷٥) س = ١٥

∴ الرابع المتناسب هو ١٥.

تدريب

(١) أوجد الأول المتناسب للكميات ٢٣، ١٥، ٦٩

(٢) أوجد الرابع المتناسب للكميات ١٨ أ ب، ١٢ أ ب²، ١٦ أ ب

(٣) الثالث المتناسب للأعداد ٢، ٤، ٦ هو ....

(٤) الثالث المتناسب للأعداد ٨، ٦، ١٢ هو ....

مثال ② :- أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى الأعداد ١ ، ١٣ ، ٧ ، ٣١ تصبح متناسبة.

الحل

نفرض أن العدد = س ⇐ ١ + س ، ١٣ + س ، ٧ + س ، ٣١ + س كميات متناسبة

∴ $\frac{١ + س}{١٣ + س} = \frac{٧ + س}{٣١ + س}$ ⇐ (١ + س)(٣١ + س) = (٧ + س)(١٣ + س)

⇐ ٣١ + ٣٢س + س² = ٩١ + ٢٠س + س²

⇐ ٣٢س − ٢٠س = ٩١ − ٣١

⇐ ١٢س = ٦٠ ⇐(÷١٢) **س = ٥**

∴ العدد هو ٥

* خد بالك

(س + ٣)(س + ٥) = س² + ٨س + ١٥

(+٣س ، +٥س)

مثال ③ :-

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة $\frac{٣}{٥}$ لأصبحت $\frac{٥}{٦}$

الحل :-

نفرض أن العدد = س ⇐ $\frac{٣ + س}{٥ + س} = \frac{٥}{٦}$ ⇐ ٦(٣ + س) = ٥(٥ + س)

⇐ ١٨ + ٦س = ٢٥ + ٥س

∴ ٦س − ٥س = ٢٥ − ١٨ ⇐ **س = ٧**

∴ العدد هو ٧

مثال ④ :- أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدي النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل :- نفرض أن العدد = س ∴ مربعه = س²

⇐ $\frac{٥ + س^2}{١١ + س^2} = \frac{٣}{٥}$ ⇐ ٥(٥ + س²) = ٣(١١ + س²)

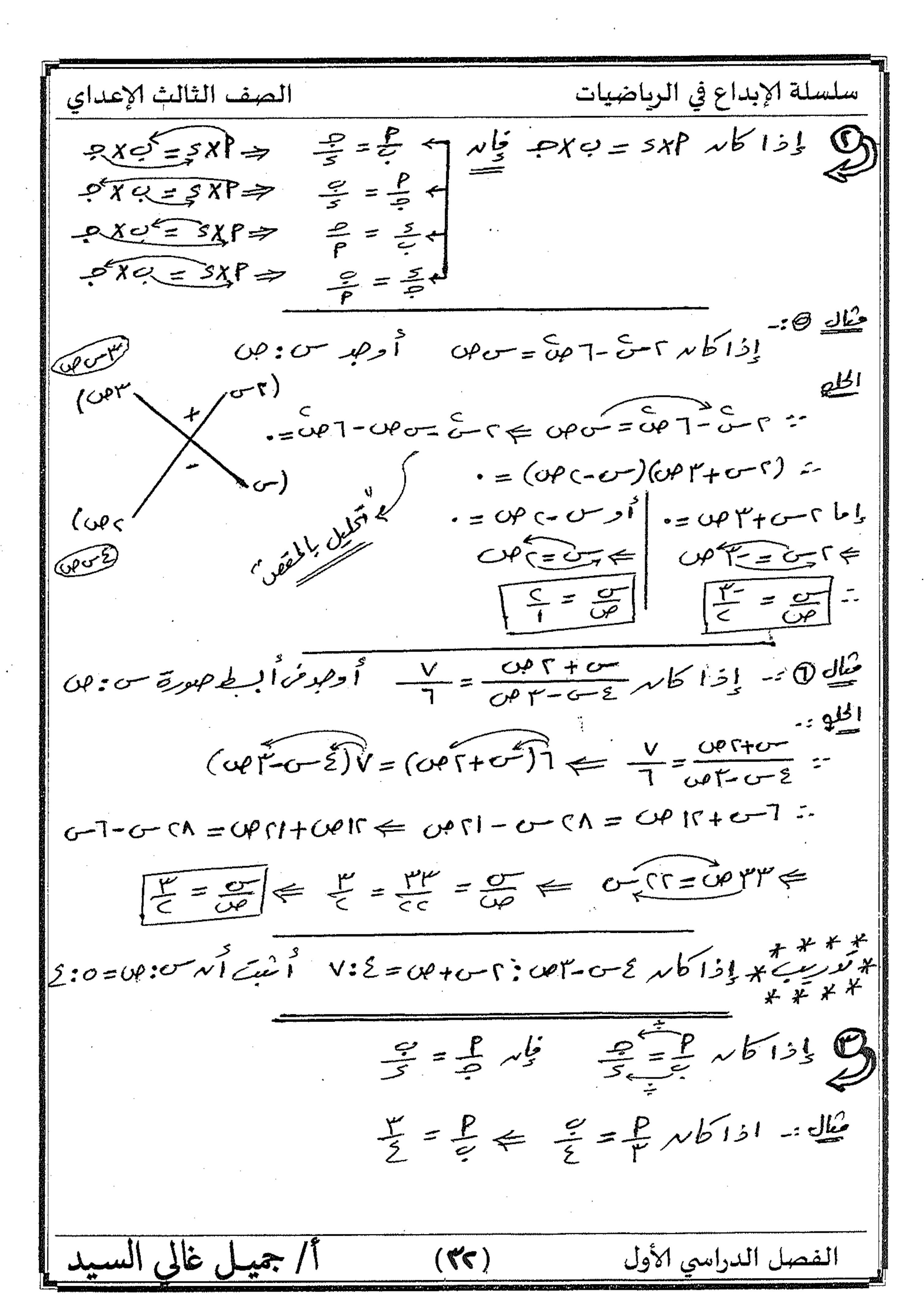
∴ ٢٥ + ٥س² = ٣٣ + ٣س² ⇐ ٥س² − ٣س² = ٣٣ − ٢٥

⇐ ٢س² = ٨ ⇐(÷٢) س² = ٤ ⇐ س = ± ٢

−٢ مرفوض "العدد موجب"

∴ العدد هو ٢ .

*** تدريب * أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى حدي النسبة ٣ : ٥ لأصبحت ٦ : ٧ ***



② إذا كان أ × د = ب × ج فإن

$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ ⇐ أ × د = ب × ج

$\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$ ⇐ أ × د = ب × ج

$\frac{د}{ب} = \frac{ج}{أ}$ ⇐ أ × د = ب × ج

$\frac{د}{ج} = \frac{ب}{أ}$ ⇐ أ × د = ب × ج

مثال ⑤ :- إذا كان ٢س² − ٦ص² = س ص أوجد س : ص

الحل

∵ ٢س² − ٦ص² = س ص ⇐ ٢س² − س ص − ٦ص² = ٠

∴ (٢س + ٣ص)(س − ٢ص) = ٠

إما ٢س + ٣ص = ٠ ⇐ ٢س = −٣ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{-٣}{٢}$

أو س − ٢ص = ٠ ⇐ س = ٢ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{١}$

"تحليل بالمقص"

(٢س) (٣ص) (س) (−٢ص) (٣س ص) (−٤س ص)

مثال ⑥ :- إذا كان $\frac{س + ٢ص}{٤س − ٣ص} = \frac{٧}{٦}$ أوجد في أبسط صورة س : ص

الحل :-

∵ $\frac{س + ٢ص}{٤س − ٣ص} = \frac{٧}{٦}$ ⇐ ٦(س + ٢ص) = ٧(٤س − ٣ص)

∴ ٦س + ١٢ص = ٢٨س − ٢١ص ⇐ ١٢ص + ٢١ص = ٢٨س − ٦س

⇐ ٣٣ص = ٢٢س ⇐ $\frac{س}{ص} = \frac{٣٣}{٢٢} = \frac{٣}{٢}$ ⇐ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$

تدريب إذا كان ٤س − ٣ص : ٢س + ص = ٤ : ٧ أثبت أن س : ص = ٥ : ٤

---

③ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن $\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$

مثال :- إذا كان $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٤}$ ⇐ $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$

④ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن [أ = جـ م ، ب = د م] حيث م ثابت لا يساوي الصفر

مثال :- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ فإن أ = ٢م ، ب = ٣م ، م ثابت ≠ ٠

مثال ⑦ :- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ أوجد قيمة $\frac{٢أ + ٣ب}{٥أ - ب}$

الحل :-

∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ ⇐ أ = ٣م ، ب = ٤م بالتعويض عن أ ، ب في العلاقة

⇐ $\frac{٢أ + ٣ب}{٥أ - ب} = \frac{٢ \times ٣م + ٣ \times ٤م}{٥ \times ٣م - ٤م} = \frac{٦م + ١٢م}{١٥م - ٤م} = \frac{١٨م}{١١م} = \boxed{\frac{١٨}{١١}}$

مثال ⑧ :- إذا كان ٤أ = ٥ب أوجد قيمة المقدار $\frac{أب + ٢أ^٢}{٣ب^٢ + أب}$

الحل :-

∵ ٤أ = ٥ب ⇐ $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٤}$ ⇐ أ = ٥م ، ب = ٤م

⇐ $\frac{أب + ٢أ^٢}{٣ب^٢ + أب} = \frac{٥م \times ٤م + ٢ \times (٥م)^٢}{٣ \times (٤م)^٢ + ٥م \times ٤م} = \frac{٢٠م^٢ + ٥٠م^٢}{٤٨م^٢ + ٢٠م^٢} = \frac{٧٠م^٢}{٦٨م^٢} = \frac{٧٠}{٦٨} = \boxed{\frac{٣٥}{٣٤}}$

ملحوظة :- حين نقول مثلاً أن النسبة بين عددين ٢ : ٣ فلا يجوز أطلاقاً إعتبار العدد الأول ٢ والعدد الثاني ٣ ولكن نفرض أن العددين هما أ ، ب ⇐ $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ فإن أ = ٢م ، ب = ٣ م ثابت

مثال ⑨ :- عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٥ وإذا أضيف إلى كلا منهما ٥ أصبحت النسبة ٣ : ٥ أوجد العددين

الحل :-

نفرض أن العددين هما ٢م ، ٥م ⇐ $\frac{٢م + ٥}{٥م + ٥} = \frac{٣}{٥}$

⇐ ٥(٢م + ٥) = ٣(٥م + ٥)

⇐ ١٠م + ٢٥ = ١٥م + ١٥ ⇐ ١٠ = ٥م $\xrightarrow{(\div ٥)}$ $\boxed{م = ٢}$

∵ العدد الأول = ٢م = ٢ × ٢ = [٤] ، العدد الثاني = ٥م = ٥ × ٢ = [١٠]

∴ العددان هما ٤ ، ١٠

*** تدريب ***

• عددان حقيقيان النسبة بينهما ٢ : ٥ وإذا طرح من العدد الأول ٣ وأضيف الى الثاني ١ صارت النسبة بينهما ١ : ٤ أوجد العددين

• عددان حقيقيان النسبة بينهما ٢ : ٣ وإذا أضيف إلى كل منهما ٣ أصبحت النسبة ٣ : ٤ أوجد العددين

تمارين على "النسبة والتناسب"

[١] أكمل ما يأتي :-

① التناسب هو ......

② إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن جـ تسمى ......

③ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

④ الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦ هو ......

⑤ إذا كان ٧س = ٣ص فإن $\frac{س}{ص}$ = ...

⑥ قسم مبلغ بين شخصين بنسبة ٢ : ٣ فإذا كان نصيب الأول ٣٠ جنيهاً فإن نصيب الآخر ......

⑦ ٥أ − ٤ب = ٠ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

⑧ إذا كان $\frac{٥أ - ٧ب}{٨أ + ١١ب}$ = ٠ فإن $\frac{ب}{أ}$ = ...

⑨ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ فإن $\frac{٢س}{٢ص}$ = ...

---

[٢] اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان $\frac{٣أ}{٥ب} = \frac{١}{٢}$ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...   [$\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

② إذا كان ٤س = ٥ص فإن $\frac{٥ص}{٤س}$ = ...   [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

③ إذا كان ٣أ = ٨ب فإن $\frac{٢أ}{ب}$ = ... [٤ ، ١٦ ، $\frac{16}{3}$ ، $\frac{3}{8}$]

④ إذا كان ٢س = ٧ص فإن $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-1}$ = ... [$\frac{2}{7}$ ، $\frac{7}{2}$ ، $\frac{49}{4}$ ، $\frac{4}{49}$]

⑤ إذا كان س ، ص ، ٢ ، ٣ متناسبة فإن $\frac{س}{ص}$ = ... [$\frac{3}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، ٣ ، ٢]

⑥ إذا كان ٥أ ، ٢ ، ٣ب ، ٧ متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ... [$\frac{3}{7}$ ، $\frac{6}{35}$ ، $\frac{3}{5}$ ، $\frac{3}{2}$]

⑦ إذا كان ٤$س^2$ + ٩$ص^2$ = ١٢س ص فإن $\frac{س}{ص}$ = ... [$\frac{3}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $-\frac{2}{3}$ ، $-\frac{3}{2}$]

⑧ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{3}{2}$ فإن $\frac{أ+ب}{أ-ب}$ = ... [$\frac{3}{2}$ ، ٥ ، $\frac{2}{5}$ ، ٢]

---

[٣] ① إذا كان $\frac{س+٣ص}{٢س-ص} = \frac{4}{3}$ أوجد النسبة س : ص

② أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

③ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ وإذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة ١ : ٣ أوجد العددين.

④ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{2}{3}$ أوجد قيمة النسبة $\frac{٣س+٢ص}{٦ص-س}$

⑤ إذا كان أ : ب = ٣ : ٥ أوجد قيمة ٧أ + ٩ب : ٤أ + ٢ب .

⑥ أوجد العدد الذي إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدي النسبة $\frac{49}{69}$ أصبحت $\frac{2}{3}$

⑦ أوجد العدد الذي إذا أضيف لكل من الأعداد ٧ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ أصبحت كميات متناسبة .

⑧ إذا كان أ − ١ ، أ + ١ ، ب − ٢ ، ب + ٢ كميات متناسبة أوجد أ : ب

⑨ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة ٥ : ٣ أوجد العددين.

⑩ ما العدد الذي إذا طرح من مقدم النسبة ١٥ : ١٣ وأضيف إلى تاليها فإنها تصبح ٣ : ٤

تابع "خواص التناسب"

ملاحظات هامة :-

① إذا كان أ : ب : جـ = ٢ : ٣ : ٥ فإن أ = ٢م ، ب = ٣م ، جـ = ٥م

② إذا كان $\frac{\text{أ}}{٣} = \frac{\text{ب}}{٧} = \frac{\text{جـ}}{٤}$ فإن أ : ب : جـ = ٣ : ٧ : ٤

③ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{٣}{١١}$ فإن أ : ب : جـ = ٢ : ٣ : ١١

④ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة وفرضنا أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

فإن أ = ب م ، جـ = د م

وبصفة عامة :- إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ..... كميات متناسبة

وفرضنا أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = ... = \text{م}$

فإن :-
- أ = ب م .
- جـ = د م . وهكذا
- هـ = و م .

مثال ① :-

إذا كان ٢أ = ٣ب = ٤جـ أوجد أ : ب : جـ

الحل :-

∵ ٢أ = ٣ب = ٤جـ (بالقسمة على ١٢) ⇐ $\frac{\text{أ}}{٦} = \frac{\text{ب}}{٤} = \frac{\text{جـ}}{٣}$

∴ أ : ب : جـ = ٦ : ٤ : ٣

مثال ② :-

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة اثبت أن $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٢\text{ب} + ٣\text{د}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$

الحل :-

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ⇐ أ = ب م ، جـ = د م

* الطرف الأيمن = $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٢\text{ب} + ٣\text{د}} = \frac{٢ \times \text{ب م} + ٣ \times \text{د م}}{٢\text{ب} + ٣\text{د}} = \frac{٢\text{ب م} + ٣\text{د م}}{٢\text{ب} + ٣\text{د}}$

$$= \frac{م(٢ب+٣د)}{٢ب+٣د} = م \longrightarrow ①$$

* الطرف الأيسر $= \frac{أ+جـ}{ب+د} = \frac{ب م + د م}{ب+د} = \frac{م(ب+د)}{ب+د} = م \longrightarrow ②$

من ①، ② ينتج أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر #

*** تدريب *** إذا كان أ، ب، جـ، د كميات متناسبة اثبت أن :-

① $\frac{أ+٣جـ}{ب+٣د} = \frac{أ}{ب}$ و ② $\frac{٢أ-٥جـ}{٢ب-٥د} = \frac{جـ}{د}$

مثال ③ :-

اذا كان س، ص، ع، ل كميات متناسبة أثبت أن $\left(\frac{س+ص}{ع+ل}\right)^٢ = \frac{٢س^٢+٣ص^٢}{٢ع^٢+٣ل^٢}$

الحل :-

$\because$ س، ص، ع، ل كميات متناسبة $\Leftarrow \frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = م \Leftarrow$ س = ص م ، ع = ل م

* الطرف الأيمن :- $\left(\frac{س+ص}{ع+ل}\right)^٢ = \left(\frac{م ص + ص}{م ل + ل}\right)^٢ = \left(\frac{ص(م+١)}{ل(م+١)}\right)^٢ = \frac{ص^٢}{ل^٢} \longrightarrow ①$

* الطرف الأيسر :- $\frac{٢س^٢+٣ص^٢}{٢ع^٢+٣ل^٢} = \frac{٢ص^٢م^٢+٣ص^٢}{٢ل^٢م^٢+٣ل^٢} = \frac{ص^٢(٢م^٢+٣)}{ل^٢(٢م^٢+٣)} = \frac{ص^٢}{ل^٢} \longrightarrow ②$

من ①، ② ينتج أن الطرفان متساويان.

مثال ④ :-

إذا كان أ، ب، جـ، د كميات متناسبة أثبت أن $\frac{أ^٢+ب^٢}{ب^٢} = \frac{جـ^٢+د^٢}{د^٢}$

الحل :-

$\because$ أ، ب، جـ، د كميات متناسبة $\Leftarrow \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م \Leftarrow$ أ = ب م ، جـ = د م

* الطرف الأيمن $= \frac{أ^٢+ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢م^٢+ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢(م^٢+١)}{ب^٢} = م^٢+١ \longrightarrow ①$

* الطرف الأيسر $= \dfrac{\text{ج}^2 + \text{د}^2}{\text{د}^2} = \dfrac{\text{د}^2\text{م}^2 + \text{د}^2}{\text{د}^2} = \dfrac{\text{د}^2(\text{م}^2 + 1)}{\text{د}^2} = \text{م}^2 + 1$ ← ②

من ① ، ② ينتج أن الطرفان متساويان

مثال ⑤ :-

إذا كان $\dfrac{\text{س}}{3} = \dfrac{\text{ص}}{4} = \dfrac{\text{ع}}{5}$ أثبت أن $\sqrt{3\text{س}^2 + 3\text{ص}^2 + \text{ع}^2} = 2\text{س} + \text{ص}$

الحل :-

* $\dfrac{\text{س}}{3} = \dfrac{\text{ص}}{4} = \dfrac{\text{ع}}{5}$ ⇐ س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

* الطرف الأيمن $= \sqrt{3\times 9\text{م}^2 + 3\times 16\text{م}^2 + 25\text{م}^2} = \sqrt{27\text{م}^2 + 48\text{م}^2 + 25\text{م}^2}$

$= \sqrt{100\text{م}^2} = 10\text{م}$ ← ①

* الطرف الأيسر $= 2\text{س} + \text{ص} = 2\times 3\text{م} + 4\text{م} = 6\text{م} + 4\text{م} = 10\text{م}$ ← ②

من ① ، ② ينتج أن الطرفان متساويان

---

⑤ إذا اعتبرنا التناسب $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{8}{12}$

* $\dfrac{2+4}{3+6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ = إحدى النسب
* $\dfrac{4+8}{6+12} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$ = إحدى النسب
* $\dfrac{2+8}{3+12} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$ = إحدى النسب
* $\dfrac{2+4+8}{3+6+12} = \dfrac{14}{21} = \dfrac{2}{3}$ = إحدى النسب

أي أن : $\dfrac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب

قاعدة :- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots\dots\dots$

وكانت $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، ..... أعداد حقيقية $\neq$ الصفر فإنه :-

$$\frac{م_1 أ + م_2 جـ + م_3 هـ + \dots}{م_1 ب + م_2 د + م_3 و + \dots} = \text{إحدى النسب}$$

• أي أنه :- يمكن ضرب حدي أي نسبة في عدد ثابت وجمع مقدمات وتوالي النسب يكون الناتج مساوياً إحدى النسب

مثال ① :- إذا كان $\frac{أ+ب}{3} = \frac{ب-جـ}{5} = \frac{جـ-أ}{7}$ أثبت أن $\frac{ب+جـ}{5} = \frac{ب-أ}{6}$

الحل :-

١- بجمع مقدمات وتوالي النسبتين الأولى والثالثة :-

$\Leftarrow \frac{أ+ب+جـ-أ}{3+7} = $ إحدى النسب $\Leftarrow \frac{ب+جـ}{10} = $ إحدى النسب ← ①

٢- بجمع مقدمات وتوالي النسبتين الثانية والثالثة :-

$\Leftarrow \frac{ب-جـ+جـ-أ}{5+7} = $ إحدى النسب $\Leftarrow \frac{ب-أ}{12} = $ إحدى النسب ← ②

من ① ، ② ينتج أن $\frac{ب+جـ}{10} = \frac{ب-أ}{12}$

$\Leftarrow \boxed{\frac{ب+جـ}{5} = \frac{ب-أ}{6}}$ #

* في حالة تساوي نسبتين يمكن اختصار بسط مع بسط أو مقام مع مقام

مثال ② :-

إذا كان $\frac{س+ص}{5} = \frac{ص+ع}{3} = \frac{ع+س}{6}$

اثبت أن $\frac{س-ع}{2} = \frac{س+ص+ع}{7}$

الحل :-

① بضرب حدي النسبة الثانية في (−١) وجمع مقدمات وتوالي النسبتين الأولى والثانية :-

$$\Leftarrow \frac{\text{س}+\text{ص}-\text{ص}-\text{ع}}{٥-٣} = \frac{\text{س}-\text{ع}}{٢} = \text{إحدى النسب} \longrightarrow ①$$

② بجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة :-

$$\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ص}+\text{ع}+\text{ع}+\text{س}}{٥+٣+٦} = \frac{٢\text{س}+٢\text{ص}+٢\text{ع}}{٥+٣+٦} = \frac{٢(\text{س}+\text{ص}+\text{ع})}{١٤} = \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{٧} = \text{إحدى النسب} \longrightarrow ②$$

من ① ، ② ينتج أن $\frac{\text{س}-\text{ع}}{٢} = \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{٧}$ #

مثال ⑧ :-

إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{أ}-٢\text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}-٢\text{جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{جـ}-٢\text{أ}}$ فأثبت أن $\frac{\text{س}+٢\text{ص}-\text{ع}}{٣\text{أ}-٥\text{جـ}} = \frac{\text{ص}+٢\text{ع}}{\text{ب}-٤\text{أ}}$

الحل :-

① بضرب حدي النسبة الثانية في (٢) والثالثة في (−١) والجمع :-

$$\Leftarrow \frac{\text{س}+٢\text{ص}-\text{ع}}{\text{أ}-٢\text{ب}+٢\text{ب}-٤\text{جـ}-\text{جـ}+٢\text{أ}} = \frac{\text{س}+٢\text{ص}-\text{ع}}{٣\text{أ}-٥\text{جـ}} = \text{إحدى النسب} \longrightarrow ①$$

② بضرب حدي النسبة الثالثة في (٢) وجمع النسبتين الثانية والثالثة :-

$$\Leftarrow \frac{\text{ص}+٢\text{ع}}{\text{ب}-٢\text{جـ}+٢\text{جـ}-٤\text{أ}} = \frac{\text{ص}+٢\text{ع}}{\text{ب}-٤\text{أ}} = \text{إحدى النسب} \longrightarrow ②$$

من ① ، ② ينتج أن $\frac{\text{س}+٢\text{ص}-\text{ع}}{٣\text{أ}-٥\text{جـ}} = \frac{\text{ص}+٢\text{ع}}{\text{ب}-٤\text{أ}}$ #

مثال ⑨ :-

إذا كان $\frac{\text{أ}+٤\text{ب}}{\text{س}+٢\text{ص}} = \frac{٤\text{ب}+٧\text{جـ}}{٣\text{ص}+٥\text{ع}} = \frac{٧\text{جـ}+\text{أ}}{٥\text{ع}+\text{س}}$ أثبت أن $\frac{\text{أ}}{٢\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الحل :-

① بضرب حدي النسبة الثانية × -١ وجمع النسب الثلاثة :-

$$\Leftarrow \frac{\text{أ} + 4\text{ب} - 4\text{ب} - 7\text{جـ} + 7\text{جـ} + \text{أ}}{\text{س} + 2\text{ص} - 2\text{ص} - 5\text{ع} + 5\text{ع} + \text{س}} = \frac{2\text{أ}}{2\text{س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \text{إحدى النسب ①}$$

② بضرب حدي النسبة الثالثة × -١ وجمع النسب الثلاثة :-

$$\Leftarrow \frac{\text{أ} + 4\text{ب} + 4\text{ب} + 7\text{جـ} - 7\text{جـ} - \text{أ}}{\text{س} + 2\text{ص} + 2\text{ص} + 5\text{ع} - 5\text{ع} - \text{س}} = \frac{8\text{ب}}{4\text{ص}} = \frac{2\text{ب}}{\text{ص}} = \text{إحدى النسب ②}$$

من ① ، ② ينتج أن $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{2\text{ب}}{\text{ص}} \Leftarrow \boxed{\frac{\text{أ}}{2\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}}$ # "من خواص التناسب"

تمارين "تابع خواص التناسب"

[١] أكمل ما يأتي :-

① $\frac{\text{أ}}{3} = \frac{\text{ب}}{2} = \frac{\text{أ}+\text{ب}}{\dots\dots}$ ، $\frac{\text{أ}}{4} = \frac{\text{ب}}{3} = \frac{2\text{أ}+\text{ب}}{\dots\dots}$ ، $\frac{\text{س}}{3} = \frac{\text{ص}}{7} = \frac{\text{ع}}{5} = \frac{\text{س}+\text{ص}-\text{ع}}{\dots\dots}$

② $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{3}{5}$ فإن $\frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}} = \dots\dots$

③ إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{7}{\text{ص}} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-\text{س}}$ فإن أ = ...

④ $\frac{\text{ك}}{3} = \frac{\text{م}}{8} = \frac{\text{ك}+\frac{1}{2}\text{م}}{\dots\dots}$

⑤ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ فإن $\frac{5\text{أ}+3\text{جـ}+\dots\dots}{5\text{ب}+\dots\dots+4\text{و}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

⑥ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = 3$ فإن $\frac{\text{أ جـ هـ}}{\text{ب د و}} = \dots\dots$

[٢]

① إذا كان $\frac{\text{س}}{3} = \frac{\text{ص}}{4} = \frac{\text{ع}}{5}$ اثبت أن $\frac{2\text{ص}-\text{ع}}{3\text{س}-2\text{ص}+\text{ع}} = \frac{1}{2}$

③ إذا كان $\frac{\text{س}}{3} = \frac{\text{ص}}{4} = \frac{\text{ع}}{5}$ أثبت أن $\sqrt{3\text{س}^2 + 3\text{ص}^2 + \text{ع}^2} = 2\text{س} + \text{ص}$

③ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة أثبت أن :-

أ- $\frac{3\text{أ} - 2\text{جـ}}{5\text{أ} + 3\text{جـ}} = \frac{3\text{ب} - 2\text{د}}{5\text{ب} + 3\text{د}}$

ب- $\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}{\text{أب} + \text{جـد}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

جـ- $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{جـ} + \text{د}}\right)^2 = \frac{2\text{أ}^2 - 3\text{ب}^2}{2\text{جـ}^2 - 3\text{د}^2}$

د- $\sqrt[3]{\frac{5\text{أ}^3 - 3\text{جـ}^3}{5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$

④ إذا كان $\frac{\text{أ}}{2} = \frac{\text{ب}}{3} = \frac{\text{جـ}}{4} = \frac{2\text{أ} - \text{ب} + 5\text{جـ}}{3\text{س}}$ أوجد قيمة س .

⑤ إذا كان $\frac{\text{س}}{2\text{أ} + \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{2\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{ع}}{2\text{جـ} - \text{أ}}$ أثبت أن $\frac{2\text{س} + 2\text{ص} + \text{ع}}{3\text{أ} + 6\text{ب}} = \frac{2\text{س} + \text{ص}}{4\text{أ} + 4\text{ب} - \text{جـ}}$

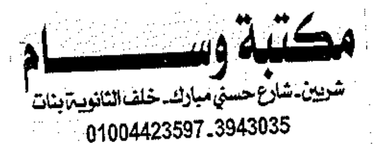
⑥ إذا كان $\frac{\text{س} + \text{ص}}{3} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{5} = \frac{\text{ع} + \text{س}}{6}$ أثبت أن $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{2\text{س} + 3\text{ص} + 3\text{ع}} = \frac{7}{19}$

⑦ إذا كان $\frac{\text{س} + \text{ص}}{7} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{5}$ $\frac{\text{ع} + \text{س}}{8}$ أثبت أن $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{س} - \text{ع}} = 5$ (٥ مشطوبة)

⑧ إذا كان $\frac{\text{أ}}{4\text{س} + \text{ص}} = \frac{\text{ب}}{\text{س} - 4\text{ص}}$ أثبت أن $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{5\text{س} - 3\text{ص}} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{3\text{س} + 5\text{ص}}$

⑨ إذا كان $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}}$ فأثبت أن كلا من هذه النسب

يساوي ٢ (مع العلم $\text{س} + \text{ص} = 0$) ثم أوجد س : ص : ع



(٢) "التناسب المتسلسل"

* إذا كان لدينا الأعداد ٣ ، ٩ ، ٢٧

∵ $\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$ ، ∵ $\frac{٩}{٢٧} = \frac{١}{٣}$ أي أن $\frac{٣}{٩} = \frac{٩}{٢٧}$

وعلى ذلك نقول أن الأعداد ٣ ، ٩ ، ٢٧ في تناسب متسلسل

قاعدة :- يقال أن الكميات أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$
ويسمى أ بالأول المتناسب ، جـ بالثالث المتناسب
أما ب بالوسط المتناسب .

* ∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ ⟸ ب^{٢} = أ جـ ⟸ ب = $\pm\sqrt{\text{أ جـ}}$

أي أن **الوسط المتناسب بين كميتين = $\pm\sqrt{\text{حاصل ضرب الكميتين}}$**

مثال ① :- أوجد الوسط المتناسب "الوسط الهندسي" بين الكميتين :-

١- ٣ ، ٢٧ ٢- ٨ ، ١٨ ٣- أ^{٣} ، أ ب^{٢}

الحل :-

١- الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{٣ \times ٢٧} = \pm\sqrt{٨١} = \pm ٩$.

٢- الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{١٨ \times ٨} = \pm\sqrt{١٤٤} = \pm ١٢$.

٣- الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{\text{أ}^{٣} \times \text{أ ب}^{٢}} = \pm\sqrt{\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٢}} = \pm$ أ^{٢} ب .

***** تدريب ***** أوجد الوسط المتناسب بين كل من الكميتين الآتيتين :-

① ٥ ، ٢٠ ② ٤ ، ٢٥ ③ أ ب^{٣} ، أ^{٣} ب^{٣}

مثال ② :- إذا كانت س وسط متناسب بين (س-١) ، (س+٢) أوجد قيمة س.

الحل :-

∵ س وسط متناسب بين (س-١) ، (س+٢)

∴ $س^2 = (س-١)(س+٢) \Leftarrow س^2 = س^2 + س - ٢$

∴ س - ٢ = صفر ⇐ **س = ٢**

مثال ③ :- أوجد الأول المتناسب بين ١٦ ، ٨

الحل :-

نفرض الأول المتناسب = س ⇐ س ، ٨ ، ١٦ في تناسب متسلسل

∴ $\frac{س}{٨} = \frac{٨}{١٦} \Leftarrow س = \frac{٨ \times ٨}{١٦} = ٤$

∴ الأول المتناسب هو ٤

ملاحظة :- إذا كان أ ، ب ، ج في تناسب متسلسل وفرضنا أن

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$ فإن أ = ب م ① ، ب = ج م ②

بالتعويض من ② في ① ⇐ $أ = (ج م) م = ج م^2$

أي أنه :- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م \Leftarrow$ ب = ج م ، $أ = ج م^2$

مثال ④ :-

إذا كان أ ، ب ، ج في تناسب متسلسل أثبت أن $\frac{أ - ج}{ب + ج} = \frac{ب - ج}{ج}$

الحل :-

∵ أ ، ب ، ج في تناسب متسلسل ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م \Leftarrow$ ب = ج م ، $أ = ج م^2$

الطرف الأيمن $= \frac{أ - ج}{ب + ج} = \frac{ج م^2 - ج}{ج م + ج} = \frac{ج(م^2 - ١)}{ج(م + ١)} = \frac{ج(م+١)(م-١)}{ج(م+١)}$

$= \text{م} - 1 \leftarrow ①$

* الطرف الأيسر $= \dfrac{\text{ب} - \text{جـ}}{\text{جـ}} = \dfrac{\text{جـم} - \text{جـ}}{\text{جـ}} = \dfrac{\text{جـ}(\text{م} - 1)}{\text{جـ}} = \text{م} - 1 \leftarrow ②$

من ①، ② ينتج أن الطرفان متساويان.

مثال ⑤: إذا كانت ب وسط متناسب بين أ، جـ أثبت أن $\dfrac{\text{أ}}{\text{أ}+\text{ب}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{ب}+\text{جـ}}$

الحل:

∵ ب وسط متناسب بين أ، جـ ⟸ أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

$\therefore \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م} \Leftarrow \text{ب} = \text{جـم} \,،\, \text{أ} = \text{جـم}^2$

* الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{أ}}{\text{أ}+\text{ب}} = \dfrac{\text{جـم}^2}{\text{جـم}^2 + \text{جـم}} = \dfrac{\text{جـم}^2}{\text{جـم}(\text{م}+1)} = \dfrac{\text{م}}{\text{م}+1} \leftarrow ①$

* الطرف الأيسر $= \dfrac{\text{ب}}{\text{ب}+\text{جـ}} = \dfrac{\text{جـم}}{\text{جـم}+\text{جـ}} = \dfrac{\text{جـم}}{\text{جـ}(\text{م}+1)} = \dfrac{\text{م}}{\text{م}+1} \leftarrow ②$

من ①، ② ينتج أن الطرفان متساويان.

مثال ⑥: إذا كان ب وسط متناسب بين أ، جـ أثبت أن $\text{ب}^2 = \dfrac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}^{-1}+\text{ب}^{-1}+\text{جـ}^{-1}}$

الحل:

∵ ب وسط متناسب بين أ، جـ $\Leftarrow \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م} \Leftarrow \text{ب} = \text{جـم} \,،\, \text{أ} = \text{جـم}^2$

* الطرف الأيسر $= \text{ب}^2 = \text{جـ}^2\text{م}^2 \leftarrow ①$

* الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}^{-1}+\text{ب}^{-1}+\text{جـ}^{-1}} = \dfrac{\text{جـم}^2+\text{جـم}+\text{جـ}}{(\text{جـم}^2)^{-1}+(\text{جـم})^{-1}+\text{جـ}^{-1}} = \dfrac{\text{جـم}^2+\text{جـم}+\text{جـ}}{\frac{1}{\text{جـم}^2}+\frac{1}{\text{جـم}}+\frac{1}{\text{جـ}}}$

⟸ بالضرب بسطاً ومقاماً في جـم^2

$\Leftarrow \frac{ج^٢م^٤ + د^٢م^٣ + د^٢م^٢}{١ + م + م^٢} = \frac{ج^٢م^٢(م^٢ + م + ١)}{١ + م + م^٢} = د^٢م^٢ \longrightarrow ②$

من ① ، ② ينتج أن الطرفان متساويان

---

* تدريب * إذا كان ب وسط متناسب بين أ ، جـ أثبت أن $\frac{أ - ب}{أ} = \frac{أ - جـ}{أ + ب}$

$\Leftarrow$ "تعميم تعريف التناسب المتسلسل" :-

* إذا كان الكميات أ ، ب ، جـ ، د ، ... في تناسب متسلسل
فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = ...$

* إذا كان أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل وفرضنا أن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

$\Leftarrow \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م \Leftarrow$ جـ = د م ، ب = د م^٢ ، أ = د م^٣

مثال ⑦ :- إذا كان أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل أثبت أن $\frac{أ^٢ + جـ^٢}{ب^٢ + د^٢} = \frac{أ جـ}{ب د}$

الحل :-

$\because$ أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل $\Leftarrow \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م \Leftarrow$ جـ = د م ، ب = د م^٢ ، أ = د م^٣

* الطرف الأيسر $= \frac{أ جـ}{ب د} = \frac{د م^٣ \times د م}{د م^٢ \times د} = \frac{د^٢ م^٤}{د^٢ م^٢} = م^٢ \longrightarrow ①$

* الطرف الأيمن $= \frac{أ^٢ + جـ^٢}{ب^٢ + د^٢} = \frac{د^٢م^٦ + د^٢م^٢}{د^٢م^٤ + د^٢} = \frac{د^٢م^٢(م^٤ + ١)}{د^٢(م^٤ + ١)} = م^٢ \longrightarrow ②$

من ① ، ② ينتج أن الطرفان متساويان .

*** تدريب *** إذا كان أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل أثبت أن $\frac{أب - جـ^2}{ب جـ - د^2} = \frac{ب^2}{جـ^2}$

مثال ⑧ :- إذا كان $\frac{أ^2 - ب^2}{ب^2 - جـ^2} = \frac{أ}{جـ}$ أثبت أن ب وسط متناسب بين أ، جـ

حيث أ + جـ $\neq$ ٠

الحل :-

$\because \frac{أ^2 - ب^2}{ب^2 - جـ^2} = \frac{أ}{جـ} \Leftarrow أ^2 جـ - ب^2 جـ = ب^2 أ - جـ^2 أ$

$\Leftarrow أ^2 جـ + جـ^2 أ = ب^2 أ + ب^2 جـ \Leftarrow أ جـ (أ + جـ) = ب^2 (أ + جـ)$

$\therefore$ أ جـ = ب^2 $\quad$ $\therefore$ ب وسط متناسب بين أ، جـ #

مثال ⑨ :- إذا كانت الكميات أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل

أثبت أن (ب + جـ) وسط متناسب بين (أ + ب)، (جـ + د)

الحل :-

لإثبات أن (ب + جـ) وسط متناسب بين (أ + ب)، (جـ + د)

يجب إثبات أن $\frac{أ + ب}{ب + جـ} = \frac{ب + جـ}{جـ + د}$ ← ✱

$\because$ أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل $\Leftarrow \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م \Leftarrow$ جـ = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3

✱ الطرف الأيمن :- $\frac{أ + ب}{ب + جـ} = \frac{د م^3 + د م^2}{د م^2 + د م} = \frac{د م^2 (م + 1)}{د م (م + 1)} = م$ ← ①

✱ الطرف الأيسر :- $\frac{ب + جـ}{جـ + د} = \frac{د م^2 + د م}{د م + د} = \frac{د م (م + 1)}{د (م + 1)} = م$ ← ②

من ①، ② ينتج أن طرفي العلاقة ✱ متساويان

$\therefore$ (ب + جـ) وسط متناسب بين (أ + ب)، (جـ + د)

تمارين على "التناسب المتسلسل"

[١] اختر الإجابة الصحيحة :-

① الثالث المتناسب للعددين ٩ ، -١٢ هو ..... [-١٦ ، ٨ ، ١٦ ، ١٠٨]

② الوسط المتناسب بين أ ، ب هو ..... [أب ، $\sqrt{\text{أب}}$ ، $-\sqrt{\text{أب}}$ ، $\pm\sqrt{\text{أب}}$]

③ إذا كان ٩ هو الوسط المتناسب بين ٣ ، ك فإن ك = ... [١٨ ، ٨١ ، ٢٧ ، ٩]

④ إذا كان أ ، ٢ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل فإن أ + ب = ... [٨ ، ١ ، ٩ ، ٧]

⑤ الوسط المتناسب بين (س - ٢) ، (س + ٢) هو ..... [$\text{س}^{2}-4$ ، $\pm\sqrt{\text{س}^{2}-4}$ ، $\sqrt{\text{س}^{2}-4}$]

⑥ العدد الذي إذا أضيف لكل من الأعداد ١ ، ٣ ، ٦ تكون في تناسب متسلسل هو ..... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

⑦ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = 2$ فإن أ = ... [5×2^{2} ، ٤٠ ، 2×5^{3}]

---

[٢] أوجد الوسط المتناسب بين :- ① ٣ ، ٢٧ ② -٢ ، -٨ ③ $\text{أ}^{2}\text{ب}$ ، $\text{أ}^{-4}\text{ب}^{-3}$

[٣] أوجد الثالث المتناسب بين :- ① ٦ ، ١٢ ② س^{2} ، -3س^{2}

[٤] إذا كان ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ أثبت أن :-

① $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}+\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

② $\frac{\text{أ}^{2}+\text{ب}^{2}}{\text{ب}^{2}+\text{جـ}^{2}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

③ $\frac{2\text{جـ}^{2}-3\text{ب}^{2}}{2\text{ب}^{2}-3\text{أ}^{2}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}^{2}}{\text{ب}^{2}}$

④ $\frac{2\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}^{2}}{\text{ب}^{2}} + \frac{\text{ب}^{2}}{\text{جـ}^{2}}$

⑤ $\left(\frac{\text{ب}-\text{جـ}}{\text{أ}-\text{ب}}\right)^{2} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

---

[٥] إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء في تناسب متسلسل أثبت أن :-

① $\frac{\text{أ}-2\text{ب}}{\text{ب}-2\text{جـ}} = \frac{3\text{ب}+4\text{جـ}}{3\text{جـ}+4\text{ء}}$

② $\frac{\text{أ}^{3}-3\text{جـ}^{2}}{\text{ب}^{2}-3\text{ء}^{2}} = \frac{\text{ب}}{\text{ء}}$

③ $\frac{\text{أب}-\text{جـء}}{\text{ب}^{2}-\text{جـ}^{2}} = \frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}}$

④ $\frac{\text{أ}^{2}+\text{ب}^{2}+\text{جـ}^{2}}{\text{ب}^{2}+\text{جـ}^{2}+\text{ء}^{2}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{بء}}$

⑤ $\sqrt[3]{\frac{5\text{أ}^{3}-3\text{ء}^{3}}{5\text{ب}^{3}-3\text{ء}^{3}}} = \frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{ء}}$

⑥ $\frac{2\text{أ}+3\text{ء}}{3\text{أ}-4\text{ء}} = \frac{2\text{أ}^{3}+3\text{ب}^{3}}{3\text{أ}^{3}-4\text{ب}^{3}}$

(٣) "التغير الطردي والتغير العكسي"

أولاً: التغير الطردي :-

طول نصف القطر (نق)	٧	١٤	٢١
محيط الدائرة (ح)	٤٤	٨٨	١٣٢

* الجدول المقابل يوضح العلاقة بين طول نصف قطر دائرة "نق" ومحيطها "ح" وإذا أخذنا قيمتان لطول نصف القطر ولتكن أنها $نق_١ = ٧$ ، $نق_٢ = ٢١$ والقيمتان المناظرتان للمحيط $ح_١ = ٤٤$ ، $ح_٢ = ١٣٢$ نجد أن :-

$$\frac{نق_١}{نق_٢} = \frac{٧}{٢١} = \frac{١}{٣} \quad ، \quad \frac{ح_١}{ح_٢} = \frac{٤٤}{١٣٢} = \frac{١}{٣}$$

أي أن :- نسبة التغير في طول نصف القطر تقابلها نسبة التغير في المحيط بنفس النسبة حينئذٍ يقال أن العلاقة بين نق ، ح هي علاقة تغير طردي أو تناسب طردي وتكتب (ح ∝ نق)

تعريف :-

* يقال أن ص تتغير طردياً مع س وتكتب ص ∝ س إذا كان :-

$ص = م س$ حيث $م \neq ٠$ أو $\frac{ص}{س} = م$ ← ثابت التناسب

* وإذا أخذنا قيمتين للمتغير س وهما $س_١$ ، $س_٢$ وأخذنا قيمتين للمتغير ص وهما $ص_١$ ، $ص_٢$ فإن :-

$$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$$

"هام" تمثل العلاقة الطردية بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل

مثال :- ① إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ١٥ عندما س = ١٠ أوجد ص عندما س = ٤ .

الحل :- ∵ ص ∝ س ⟸ $ص = م س$ ← "تسمى العلاقة بين س ، ص" ، $م \neq ٠$

$\Leftarrow$ ١٥ = ١٠ م $\Leftarrow$ م = $\frac{١٥}{١٠}$ = $\boxed{\frac{٣}{٢}}$

$\therefore$ $\boxed{ص = \frac{٣}{٢} س}$ ← العلاقة بين س ، ص

عند س = ٤ $\Leftarrow$ ص = $\frac{٣}{٢} \times ٤ = ٦$ $\Leftarrow$ $\boxed{ص = ٦}$ #

"حل آخر" "بدون إيجاد العلاقة بين س ، ص"

$\because$ ص $\propto$ س

$\Leftarrow \frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢} \Leftarrow \frac{١٥}{ص_٢} = \frac{١٠}{٤} \Leftarrow ص_٢ = \frac{١٥ \times ٤}{١٠} = ٦$

$\Leftarrow \boxed{ص = ٦}$ #

*** تدريب *** إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ١٥ عند س = ٢ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة س عند ص = ١٢ .

مثال ⑤ :- إذا كانت ص $\propto$ س² وكانت ص = ٢ عندما س = ٢
أوجد قيمة ص عندما س = $\frac{١}{٢}$

الحل :-

$\because$ ص $\propto$ س² $\Leftarrow \frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١^٢}{س_٢^٢} \Leftarrow \frac{٢}{ص_٢} = \frac{(٢)^٢}{(\frac{١}{٢})^٢} \Leftarrow \frac{٢}{ص_٢} = \frac{٤}{\frac{١}{٤}}$

$\Leftarrow ص_٢ = \frac{٢ \times \frac{١}{٤}}{٤} = \boxed{\frac{١}{٨}}$ $\Leftarrow \boxed{ص = \frac{١}{٨}}$

مثال ⑥ :- إذا كان ٩ س² - ٢٤ س ص + ١٦ ص² = ٠ فأثبت أن ص تتناسب طرديًا مع س .

الحل :-

$\because$ ٩ س² - ٢٤ س ص + ١٦ ص² = ٠ $\xLeftarrow{بالتحليل}$ (٣ س - ٤ ص)(٣ س - ٤ ص) = ٠

$\Leftarrow$ (٣ س - ٤ ص)² = ٠ $\Leftarrow$ ٣ س - ٤ ص = ٠ $\Leftarrow$ ٣ س = ٤ ص

$\Leftarrow \boxed{\frac{ص}{س} = \frac{٣}{٤}}$ ① أو "بالقسمة على ٤" $\Leftarrow \boxed{ص = \frac{٣}{٤} س}$ ② من ① أو ② ينتج

$\boxed{ص \propto س}$ #

تدريب * إذا كان $٤\text{س}^٢ - ٢٠\,\text{س}\,\text{ص} + ٢٥\,\text{ص}^٢ = ٠$ أثبت أن $\text{ص} \propto \text{س}$

مثال ④ :- إذا كان $\text{س} = \text{ل} + ٩$ ، $\text{ل} \propto \text{ص}$ فأوجد العلاقة بين ل ، ص علماً بأن $\text{س} = ٢٤$ ، $\text{ص} = ٥$

الحل :-

∵ $\text{ل} \propto \text{ص} \Leftarrow \text{ل} = \text{م}\,\text{ص}$ ∵ $\text{س} = \text{ل} + ٩$

بالتعويض عن قيمة ل $\Leftarrow$ $\boxed{\text{س} = \text{م}\,\text{ص} + ٩}$ ← ✱ (-٩)

عند $\text{س} = ٢٤$ ، $\text{ص} = ٥$ $\Leftarrow ٢٤ = ٥\text{م} + ٩$

$\Leftarrow ٥\text{م} = ٢٤ - ٩ \Leftarrow ٥\text{م} = ١٥ \overset{(\div ٥)}{\Longleftarrow} \boxed{\text{م} = ٣}$

بالتعويض في ✱

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = ٣\text{ص} + ٩}$ ← العلاقة بين س ، ص

∵ $\text{ل} = \text{م}\,\text{ص} \Leftarrow \boxed{\text{ل} = ٣\,\text{ص}}$ ← العلاقة بين ل ، ص #

← عند $\text{ل} = ١٢ \Leftarrow ١٢ = ٣\,\text{ص} \overset{(\div ٣)}{\Longleftarrow} \boxed{\text{ص} = ٤}$ #

مثال :- إذا كان (ح) يمثل حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه ثابت وكان (ح) يتغير بتغير مربع طول نصف قطر قاعدة المخروط (نق) ، وكان حجم المخروط ٤٧٧ سم³ عندما كان طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم . فأوجد حجم المخروط عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم .

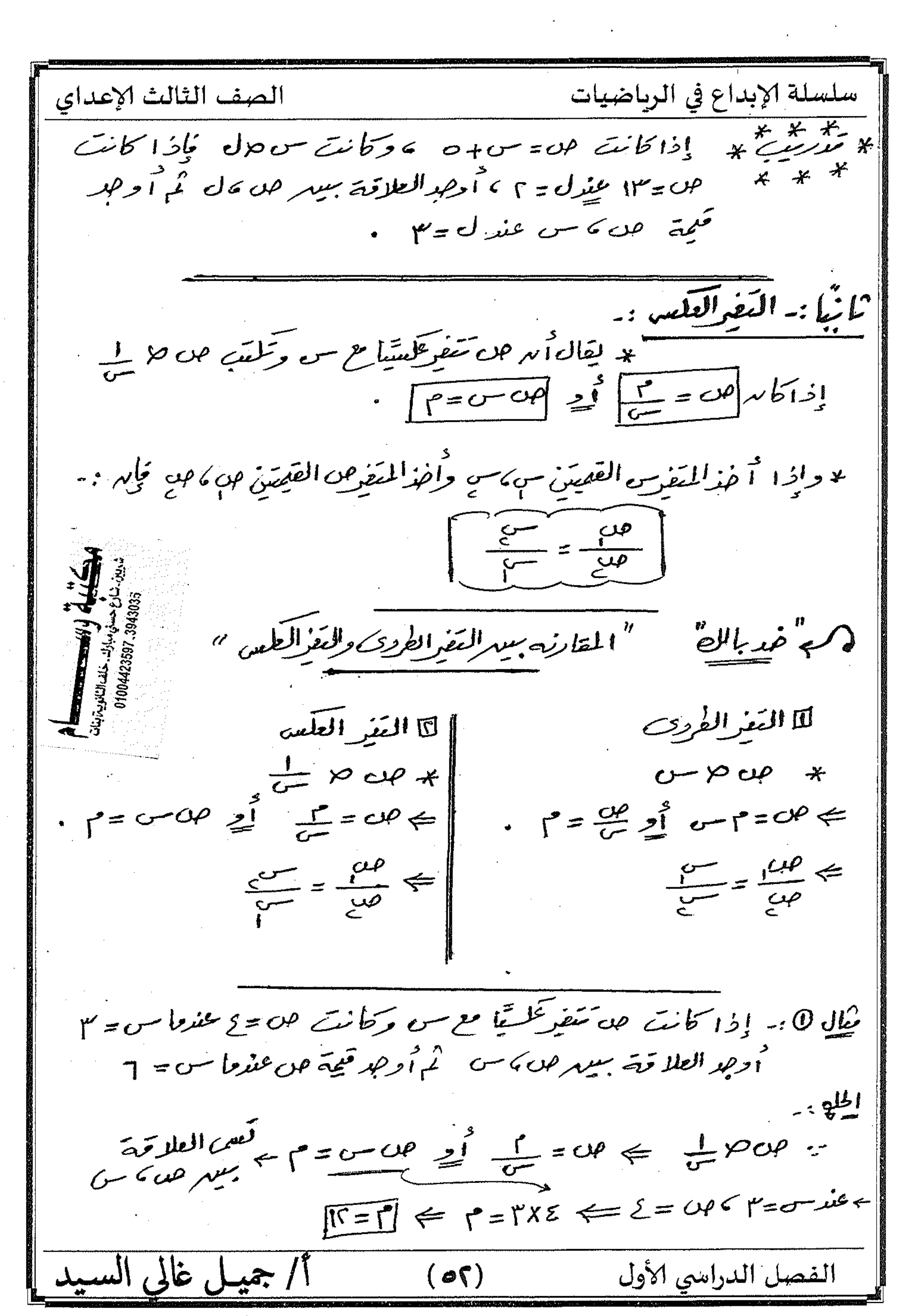
الحل :-

∵ $\text{ح} \propto \text{نق}^٢ \Leftarrow \dfrac{\text{ح}_١}{\text{ح}_٢} = \dfrac{\text{نق}_١^٢}{\text{نق}_٢^٢} \Leftarrow \dfrac{٤٧٧}{\text{ح}_٢} = \dfrac{(١٥)^٢}{(١٠)^٢}$

$\Leftarrow \dfrac{٤٧٧}{\text{ح}_٢} = \left(\dfrac{١٥}{١٠}\right)^٢ \Leftarrow \dfrac{٤٧٧}{\text{ح}_٢} = \left(\dfrac{٣}{٢}\right)^٢ \Leftarrow \dfrac{٤٧٧}{\text{ح}_٢} = \dfrac{٩}{٤}$

∴ $\text{ح}_٢ = \dfrac{٤٧٧ \times ٤}{٩} = ٢١٢\ \text{سم}^٣$

∴ حجم المخروط المطلوب = ٢١٢ سم³ . #



*** تدريب *** : إذا كانت $ص = س + ٥$ ، وكانت $س \propto ل$ فإذا كانت $ص = ١٣$ عندما $ل = ٢$ ، أوجد العلاقة بين ص ، ل ثم أوجد قيمة ص ، س عندما $ل = ٣$.

ثانياً :- التغير العكسي :-

* يقال أن ص تتغير عكسياً مع س وتكتب $ص \propto \frac{1}{س}$

إذا كان $ص = \frac{م}{س}$ أو $ص\,س = م$.

* وإذا أخذ المتغير س القيمتين $س_1$ ، $س_2$ وأخذ المتغير ص القيمتين $ص_1$ ، $ص_2$ فإن :-

$$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$$

خد بالك "المقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي"

١ التغير الطردي	٢ التغير العكسي
* $ص \propto س$	* $ص \propto \frac{1}{س}$
⇐ $ص = م\,س$ أو $\frac{ص}{س} = م$.	⇐ $ص = \frac{م}{س}$ أو $ص\,س = م$.
⇐ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$	⇐ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

مثال ١ :- إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت $ص = ٤$ عندما $س = ٣$ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما $س = ٦$

الحل :-

∵ $ص \propto \frac{1}{س}$ ⇐ $ص = \frac{م}{س}$ أو $ص\,س = م$ ← نص العلاقة بين ص ، س

← عند $س = ٣$ ، $ص = ٤$ ⇐ $م = ٤ \times ٣$ ⇐ $م = ١٢$

∴ $ص \, س = ١٢$ ← العلاقة بين س ، ص

قيمة ص عند س = ٦ ⟸ ٦ ص = ١٢ $\xLeftarrow{(\div ٦)}$ $ص = ٢$ #

*** تدريب *** إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٢٤ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد ص عندما س = ٦٠

مثال ②:- إذا كانت ص تتناسب عكسياً مع مربع س ، وكانت ص = ٤ عندما س = ٢ . أوجد قيمة ص عندما س = ٤

الحل:-

∵ $ص \propto \frac{١}{س^٢}$ ⟸ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢^٢}{س_١^٢}$ ⟸ $\frac{٤}{ص_٢} = \frac{١٦}{٤}$

⟸ $ص_٢ = \frac{٤ \times ٤}{١٦} = ١$ ⟸ $ص = ١$ #

مثال ③:- إذا كان (ع) يمثل ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة "حجمها ثابت" يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطرها (نق) . وكان ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم فأوجد ع عندما نق = ١٥,٧٥ سم

الحل:-

∵ $ع \propto \frac{١}{نق^٢}$ ⟸ $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{نق_٢^٢}{نق_١^٢}$ ⟸ $\frac{٢٧}{ع_٢} = \frac{(١٥,٧٥)^٢}{(١٠,٥)^٢}$

⟸ $ع_٢ = \frac{٢٧ \times (١٠,٥)^٢}{(١٥,٧٥)^٢} = ١٢$ سم ⟸ $ع = ١٢$ سم

مثال ④:- إذا كان $س^٢ ص^٢ + ٩ = ٦ س ص$ أثبت أن $ص \propto \frac{١}{س}$

الحل:-

∵ $س^٢ ص^٢ + ٩ = ٦ س ص$ ⟸ $س^٢ ص^٢ - ٦ س ص + ٩ = ٠$ ← بالتحليل

⟸ $(س ص - ٣)(س ص - ٣) = ٠$ ⟸ $(س ص - ٣)^٢ = ٠$

⟸ $س ص - ٣ = ٠$ ⟸ $س ص = ٣$ ∴ ص تتغير عكسياً مع س #

* تدريب * إذا كان $٤ أ^٢ + ٩ ب^٢ = ١٢ أ ب$ أثبت أن ب $\propto \frac{1}{أ}$

مثال ⑤ :- إذا كان ص $\propto$ س أثبت أن $س^٢ + ص^٢ \propto س^٢ - ص^٢$

الحل :-

$\because$ ص $\propto$ س $\Leftarrow$ ص = م س ، م $\neq$ ٠ "تغير طردي"

* نعدل المطلوب ليكون المطلوب إثبات أن $\frac{س^٢ + ص^٢}{س^٢ - ص^٢}$ = ثابت

$\because \frac{س^٢ + ص^٢}{س^٢ - ص^٢} = \frac{س^٢ + م^٢ س^٢}{س^٢ - م^٢ س^٢} = \frac{س^٢(١ + م^٢)}{س^٢(١ - م^٢)} = \frac{١ + م^٢}{١ - م^٢} = \frac{ثابت}{ثابت} = ثابت$ (ثابت $\neq$ ٠)

$\therefore \frac{س^٢ + ص^٢}{س^٢ - ص^٢}$ = ثابت $\Leftarrow$ $س^٢ + ص^٢ \propto س^٢ - ص^٢$ #

تمارين على "التغير الطردي والتغير العكسي"

[1] أكمل ما يأتي :-

① إذا كانت ص $\propto$ س فإن $\frac{ص}{س}$ = ...

② إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س فإن $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = ...

③ إذا كان ٢ س ص = ٥ فإن ص $\propto$ ......

④ إذا كانت ص = $\frac{٣}{٥}$ س فإن ص $\propto$ ......

⑤ إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ فإن ص تتغير عكسياً مع ......

⑥ إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ... عندما س = ١٢ .

⑦ إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٤ فإن $\frac{ص}{س}$ = ... "في أبسط صورة".

⑧ إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢٠ فإن س = ١٢ عندما ص = ...

⑨ إذا كان س − ٢ص = ٠ فإن س $\propto$ ......

⑩ إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فإن ص = ... س .

[٢] اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان ص تتغير عكسياً مع س ، ك ثابت التناسب فإن ....

أ) ص = ك س ب) ص = ك ÷ س جـ) ص = $\frac{ك}{س}$ د) ص = $\frac{ك}{س}$

② إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ٥ عندما س = ٣ فإن ثابت التغير = ...

أ) ١٥ ب) ٥ جـ) ٣ د) $\frac{٥}{٣}$

③ إذا كان ص تتغير عكسياً مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فإن ثابت التناسب = ...

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) ٢ د) ٦

④ إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ فإن س تتناسب ....

أ) طردياً مع ص ب) عكسياً مع ص جـ) عكسياً مع ص د) عكسياً مع $\sqrt{ص}$

⑤ إذا كانت التكاليف الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طردي مع عدد المشتركين (س) فإن ....

أ) ص = أ س ب) ص = $\frac{أ}{س}$ جـ) ص = أ + $\frac{م}{س}$ د) ص = أ + م س

---

[٣] ① إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٧ ثم أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤ .

② إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ١٠ عندما س = ٣ أوجد قيمة ص عندما س = ٥ ثم أوجد العلاقة بين س ، ص .

③ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٦٠

④ إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١,٥ .

⑤ إذا كانت ص ∝ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{١}{س^٢}$ أوجد العلاقة بين س ، ص إذا علم أن ص = ٤ عندما س = ٣ .

⑥ إذا كان ص ∝ (س + ١) أوجد العلاقة بين س ، ص إذا كانت س = ٣ عندما ص = ٢

⑦ إذا كان $\frac{٢س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ أثبت أن ص ∝ ع .

⑧ إذا كان $س^2 ص^2 - ١٤ س ص + ٤٩ = ٠$ أثبت أن $ص \propto \frac{1}{س}$.

⑨ إذا كانت $ص = م - ٩$ وكانت $ص \propto \frac{1}{س^2}$ وكانت $م = ١٨$ عندما $س = \frac{٢}{٣}$ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم استنتج قيمة ص عندما $س = ١$.

⑩ إذا كانت $س = ع + ٨$ وكانت ع تتناسب عكسياً مع ص وكانت $ع = ٢$ عندما $ص = ٣$ أوجد ص عندما $س = ٣$

⑪ إذا كانت $س + ص = \frac{1}{س} + \frac{1}{ص}$ أثبت أن $ص \propto \frac{1}{س}$.

⑫ إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طردياً مع وزنه على الأرض (و') وكان الجسم يزن ٨٤ كجم على الأرض ، ووزنه ١٤ كجم على القمر ، فماذا يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كجم ؟

⑬ إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسياً مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل ، فإذا أنجز العمل ٦ عمال في ٤ ساعات ، فما الزمن اللازم الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل ؟ .

⑭ إذا كان مقدار السرعة (ع) التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم (نق) وكانت ع = ٥ سم/ث عندما نق = ٣ سم أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم .

⑮ من بيانات الجدول التالي أجب على الأسئلة الآتية :-

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

① بين نوع التغير بين س ، ص .
② أوجد ثابت التناسب .
③ أوجد قيمة ص عندما $س = ٣$.
④ أوجد قيمة س عندما $ص = \frac{٤}{٥}$ ؟ .

اختبار الوحدة

1. إذا كان $\frac{أ+ب}{٣} = \frac{ب+جـ}{٦} = \frac{جـ+أ}{٥}$ فاثبت أن: $\frac{أ+ب+جـ}{أ} = ٧$.

2. إذا كان ص = أ − ٩ وكان ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ وكان أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد العلاقة بين ص، س ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١.

3. إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فاثبت أن ص ∝ ع.

4. إذا كان $س^٤ ص^٢ - ١٤ س^٢ ص + ٤٩ = ٠$ فأثبت أن ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$.

5. **الربط بالفلك:** إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على القمر (ر)، فإذا كان $و_١$ = ١٨٢ كجم، $ر_١$ = ٣٥ كجم فأوجد $ر_٢$ عندما $و_٢$ = ٣١٢ كجم.

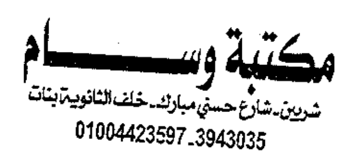
6. **الربط بالفيزياء:** إذا كان مقدار السرعة ع التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ ث عندما نق = ٣ سم. أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم.

الوحدة الثالثة : -

الإحصاء

(1) جمع البيانات

(2) التشتت



جمــــع البيانـــات

مصادر جمع البيانات

مصادر أولية (مصادر ميدانية)
ونحصل عليها عن طريق المقابلة الشخصية

مصادر ثانوية (تاريخية)
ونحصل عليها من هيئات رسمية أو الجهاز المركزى أو الإنترنت

أسلوب جمع البيانات

أسلوب الحصر الشامل
وهو يشمل جميع أفراد المجتمع
- ومميزاته : الدقة والشمولية
- وعيوبها : تحتاج وقت طويل وأموال باهظة

أسلوب العينات
وهى تشمل مجموعة جزئية من المجتمع بحيث لا تقل عن ١٠٪
- مميزاته : توفير الوقت والجهد وهى الأسلوب الوحيد للمجتمعات الكبيرة مثل مجتمع الأسماك
- وعيوبها : عدم الدقة وعدم الشمولية

كيفية اختيار العينات :

عينة عمدية
وهو اختيار متحيز ويتم اختيار عدد من الأفراد ثم إقامة التجربة ثم سؤالهم ثم كتابة النتائج مثل اختيار عدد من الأفراد ثم شرح لهم درس معين ثم سؤال على مدى فهم الدرس (اختيار ثم تجربة ثم السؤال)

عينة عشوائية
وهو إقامة التجربة أولاً ثم الاختيار من الأفراد ثم سؤالهم وكتابة النتائج مثل شرح الدرس ثم اختيار بعض الأفراد ثم كتابة النتائج (التجربة ثم الاختيار ثم السؤال)

أنواع العينات العشوائية

العينة العشوائية البسيطة
يكون المجتمع متجانس لا يراعى فيها الفرق بين عدد الطبقات

العينة العشوائية الطبقية
ويكون المجتمع غير المتجانس وهو اختيار عدد أفراد العينة بنسبة متساوية من كل طبقة فإذا كنا فى مجتمع به نسبة الذكور إلى الإناث ٢ : ١ فيتم اختيار أفراد العينة من الذكور ضعف أفراد العينة الإناث

مثال ١

عند دراسة المستوى التعلمى لعينة عشوائية طبقية لمجتمع ما مكونة من ٥٠٠ شخص بحيث تكون نسبة الذكور إلى الإناث ٣ : ٢ وأردنا عينة ٥٠ شخصا فلابد أن نختار ٣٠ من الذكور و ٢٠ من الإناث . (وتسمى هذه العينة عينة طبقية)

تدريب١ إذا أخذت عينة من مجتمع طبقى عدده (١٠٠٠) شخص لفحص شئ ما وكانت نسبة الذكور إلى الإناث هى ٤ : ٣ ، وأخذت عينة عددها ١٤٠ ، **فما هو عدد الذكور وما هو عدد الإناث ؟**

※ **العينة العشوائية باستخدام الآلة الحاسبة :**

مثال٢

عند اختيار عينة عشوائية لابد أن يحصل كل فرد على فرصة فى الاختيار ويمكن اختيار أعضاء العينة العشوائية على أساس .

الحـل

- إعطاء كل فرد فى المجتمع رقم إلى عدد العينة = ... = ... = Ran Sh
- استخدام خاصية الرقم العشوائى الموجود بالآلة الحاسبة

نفرض أن ٢١٢ عاملاً ميكانيكيا يعملون فى صيانة المركبات ويجرى عليهم استبيان عن شركة كبرى لتأجير السيارات وتريد الشركة معرفة آرائهم فى :

- تفادى تأخير الورش فى الإصلاح بسبب عدم توافر قطع الغيار .
- زيادة ضمان المركبات باستخدامها لمسافة ١٠٠٠ كم .
- زيادة كفاءة السيارات عن طريق الفحص خارج الورش .

نفرض أننا نريد إبراز أرقام عشوائية فى نطاق الصفر إلى ٢١٢ وتعتبر عينة ١٠% كافية للحصول على معلومات موثقة وبذلك يجب الحصول على ٢١ رقما عشوائياً .

استخدم الآلة الحاسبة فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩ وبذلك يمكن الحصول على نطاق مؤثر للعينة يتراوح ما بين الصفر و٩٩٩ .

بالنسبة للأرقام من صفر إلى ٢١٢ يتم تجاهل الأرقام العشوائية التى تزيد عن ٢١٢ ولابد من استمرار توالد الأرقام العشوائية حتى نصل إلى ١٠% من ٢١٢ وهى ٢١ رقما عشوائيا وهذا واضح فى الجزء المخصص للنشاط بعد شرح الدرس فى هذه الوحدة .

لنفرض أن الآلة الحاسبة قد أخرجت هذه الأرقام العشوائية باستخدام

بهذا يصبح العمال الذين يحملون هذه الأرقام من بين ٢١٢ عاملاً هم العينة المختارة لإجراء هذا الاستبيان كما يمكن توليد الأرقام العشوائية عن طريق (العشوائية) فى برنامج إكسيل .

تمارين (١)

أ

(١) أكمل

أ	ب
(١) من أساليب جمع البيانات أسلوب .... ،	(١) القيمة الإحصائية هى جزء من أنواع العينة العشوائية عينة عشوائية .... ، ....
(٢) عند اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى يراعى فيها الفرق بين الطبقات تسمى هذه العينة	(٢) عند اختيار عينة غير متعمدة من مجتمع كبير متجانس فتسمى هذه العينة بالعينة ....

أ	ب
(١) قارن بين أسلوبى الحصر الشامل والعينات مبينا مزايا وعيوب كلاً منها .	(١) عند التحليل لدخول الحجاج للسعودية يكون هذا مستخدما أسلوب حصر شامل أم أسلوب العينة .
(٢) ك.م اذكر الأسلوب المناسب لجمع البيانات فى كل من : ١–معرفة درجة ملوحة مياه البحر . ٢–لمعرفة صلاحية أسطوانات الغاز قبل توزيعها . ٣–معرفة سيارة بها قمح إذا كان القمح صالح أم لا .	(٢) اذكر الأسلوب المناسب لجمع البيانات فى كل من : ١–معرفة حل الواجب للحصة الماضية لعدد من الطلبة عددهم ٥ . ٢–معرفة قفص من السوق للفلفل إذا كان حار أم لا. ٣–معرفة صلاحية دستة آلات حاسبة

(٣) ك م إذا كان هناك في إحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى و ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية ، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة ، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها . احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة

(٣) ك م يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة وتقسم إلى ثلاث طبقات بياناتها كالآتى :.

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة ٢٤٠ مفردة أوجد عدد مفردات العينة كلها

(٤) ك م ترغب إدارة أحد الفنادق فى معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بها فى مستوى الخدمة لهم فقامت بإعطاء كل نزيل رقما ٢٠١ إلى ٥٠٠ واختيار ١٠% منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة ، حدد بآلتك أرقام النزلاء المستهدفين فى هذه العينة .

(٤) ك م قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع رأى ٢٠٠ عامل لمعرفة ما يفضلون تناوله فى فترة الراحة وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ : ٢٠٠ ثم اختيار العينة تمثل ١٠% لسؤالهم عما يفضلون من مشروبات ساخنة أم وجبات خفيفة أم مثلجات ، حدد بآلتك الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة.

(٥) ك م الجدول التالى يمثل عدد الطلاب فى إحدى الكليات الجامعية

الفـرقـة	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
عدد الطلاب	٩٠٠	٨٠٠	٧٠٠	٦٠٠

وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ١٢٠ طالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها احسب عدد مفردات كل طبقة من العينة .

(٥) يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ١٠٠٠ مفردة ومقسم إلى طبقتين بيانها كالآتى

الطبقـــة	الأولى	الثانية
عـدد الطلاب	٢٠٠	٨٠٠

فإذا كانت عدد المفردات التى تمثل الطبقتين عددهم ١٥٠ مفردة ، أوجد عدد المفردات لكل طبقة .

(٦) ك م مدرسة بها ٣٦٠ طالباً و ٤٨٠ طالبة أرادت المدرسة عمل استبيان على عينة قوامها ٣٥ طالباً وطالبة تمثل فيها كل طقة وحجمها احسب عدد مفردات كل طبقة.

(٦) مصنع به ١٢٥ عاملاً ، ٧٥ فنياً ، ٥٠ مهندس ، ويراد أخذ عينة طبقية حجمها ٥٠ فردا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ، احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة .

التشــــتت

تذكر : ● مقاييس النزعة المركزية :-

① **الوسط الحسابى** = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

② **المنوال** : **هى القيمة الأكثر تكراراً**

③ **الوسيط** : **هى القيمة التى تتوسط القيم من حيث عددهم وذلك بعد الترتيب**

❋ فمثلا القيم : ٣ ، ١ ، ٣ ، ١١ ، ٧

المنوال هو ٣

الوسط الحسابى = $\frac{٣+١+٣+١١+٧}{٥} = ٥$

الوسيط : (رتب تصاعديا ١ ، ٣ ، **٣** ، ٧ ، ١١)

الوسيط هو ٣

التشتت : هو مدى بيان أو اختلاف القيم عن الوسط الحسابى

● **مقاييس التشتت** : المدى — الانحراف المعيارى

أولاً : المدى لقيم : هو الفرق بين أصغر قيمة وأكبر قيمة

فمثلاً أوجد المدى للقيم (٩ ، ٦ ، ٤ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٧) (١٢ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ٥ ، ٢٥)

المدى للمجموعة الأولى = ١٧ − ٤ = ١٣

المدى للمجموعة الثانية = ٢٥ − ٥ = ٢٠

وبذلك يكون التشتت فى المجموعة الثانية أكبر :

لأنه ٦ قيم تشتت فى مدى ٢٠ فى حين أن ٦ قيم فى المجموعة الأولى تشتت فى مدى ١٣

ولو استبعدنا القيمة ٢٥ فيكون المدى ٧ لأن القيمة ٢٥ تشتت عن الوسط كثيراً ،فجعلت التشتت أكبر

ثانياً : الانحراف المعيارى : هو أكثر مقاييس التشتت انتشارا وأدقها

الانحراف المعيارى = σ = $\sqrt{\frac{\text{مجموع } (س - \bar{س})^2}{ن}}$

حيث σ تنطق سيجما وهو الانحراف المعيارى

$\bar{س}$ تنطق (س Bar) وهو الوسط الحسابي ، ن عدد القيم

$(س - \bar{س})$ هو انحراف القيمة عن الوسط الحسابي

أولاً : حساب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لمجموعة من القيم

مثال١

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعيارى للقيم ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٧ ، ٩ ، ١١

الحل

الوسط الحسابى = $\bar{س}$ = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

$\bar{س} = \frac{٦+٥+٤+٧+٩+١١}{٦} = ٧$

الانحراف المعيارى = σ = $\sqrt{\frac{\text{مجموع } (س - \bar{س})^2}{ن}}$

$= \sqrt{\frac{٣٤}{٦}} \approx ٢,٣٨٠$

س	$\bar{س}$	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
٦	٧	١-	١
٥	٧	٢-	٤
٤	٧	٣-	٩
٧	٧	٠	٠
٩	٧	٢	٤
١١	٧	٤	١٦
			٣٤

تدريب١ **أوجد الوسط الحسابى للقيم الآتية :**

١٧ ، ١٦ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٥

وأوجد الانحراف المعيارى

[١٦ ، ١,١٥٤]

ثانياً : حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى

الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى = $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 \times ك}{\text{مجـ ك}}}$

حيث س القيمة أو مركز المجموعة ، ك تكرار القيمة أو المجموعة ، مجـ ك هى مجموع التكرارات

، $\overline{س}$ الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـ س} \times ك}{\text{مجـ ك}}$

مثال ٢

ك م فيما يلى التوزيع التكرارى يوضح عدد الأهداف التى سجلت فى عدد من مباريات لكرة القدم

عدد الأهداف س	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد المباريات ك	١	٤	٦	٩	٥	٣	٢

الحل

أولاً : نوجد الوسط الحسابى س: للجدول كالآتى :

الدرجة س	التكرار ك	س × ك
٠	١	٠
١	٤	٤
٢	٦	١٢
٣	٩	٢٧
٤	٥	٢٠
٥	٣	١٥
٦	٢	١٢
	٣٠	٩٠

الوسط الحسابى $\overline{س}$

$\overline{س} = \frac{\text{مجـ س} \times ك}{\text{مجـ ك}} = \frac{٩٠}{٣٠} = ٣$

ثانياً :

لإيجاد الانحراف نكون الجدول الآتى :

س	$\overline{س}$	(س - $\overline{س}$)	(س - $\overline{س}$)^2	ك	(س - $\overline{س}$)^2 × ك
٠	٣	٣-	٩	١	٩
١	٣	٢-	٤	٤	١٦
٢	٣	١-	١	٦	٦
٣	٣	صفر	صفر	٩	صفر
٤	٣	١	١	٥	٥
٥	٣	٢	٤	٣	١٢
٦	٣	٣	٩	٢	١٨
				٣٠	٦٦

الانحراف المعيارى

$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 \times ك}{\text{مجـ ك}}}$

$= \sqrt{\frac{٦٦}{٣٠}} = ١,٤٨٣$

تدريب٢ فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة

عدد الوحدات التالفة س	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق ك	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

– أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة [٣ ، ١,٤٢٨]

ثالثاً : الانحراف المعيارى لجدول توزيع تكرارى ذو مجموعات

مثال٣

فيما يلى التوزيع التكرارى ذو المجموعات الآتى يبين درجات ٤٠ تلميذ فى أحد الاختبارات لإحدى المواد :

المجموعات	٠–	٤–	٨–	١٢–	١٦–٢٠	المجموع
التكرار	٥	١٠	١٥	١٠	٥	٤٥

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع .

الحل

(١) نوجد مراكز المجموعات س

فيكون : مركز المجموعة الأولى = $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة + الحد الأعلى}}{٢} = \frac{٠ + ٤}{٢} = ٢$

مركز المجموعة الثانية = $\frac{٤ + ٨}{٢} = ٦$ وهكذا ونسجلها فى العمود الثانى

(٢) نضرب مراكز المجموعات × التكرارات المناظرة لها ، أى س × ك ونسجلها فى العمود الرابع

نوجد الوسط الحسابى $\overline{س} = \frac{\text{مجـ س × ك}}{\text{مجـ ك}}$

(٣) نوجد انحراف مركز كل مجموعة (س) عن الوسط الحسابى ، أى نوجد $(س - \overline{س})$

(٤) نوجد مربعات انحرافات مراكز المجموعة عن الوسط عن الوسط الحسابى ، أى $(س - \overline{س})^٢$

(٥) نوجد حاصل ضرب مربع انحراف مركز كل مجموعة عن الوسط الحسابى × تكرار هذه المجموعة أى $(س - \overline{س})^٢ × ك$

(٦) نحسب الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ } (س - \overline{س})^٢ × ك}{\text{مجـ ك}}}$

> **ملحوظة هامة فى التوزيع التكرارى ذو المجموعات س ، ع وهو يعرف من (الشرطة) تكون (س - س) هو انحراف مركز المجموعة عن الوسط الحسابى**

أولاً : نوجد الوسط الحسابى $\overline{س}$ كالآتى :

المجموعات	مراكز المجموعات س	التكرار ك	س × ك	
-٠	٢	٥	١٠	نلاحظ أن هذا الجدول يوجد خانة زيادة لأن المجموعات من : إلى لاحظ: مركز المجموعة = (الحد الأدنى + الحد الأعلى) ÷ ٢
-٤	٦	١٠	٦٠	
-٨	١٠	١٥	١٥٠	
-١٢	١٤	١٠	١٤٠	فمثلاً : أول مركز = $\frac{٠ + ٤}{٢}$ = ٢
-١٦	١٨	٥	٩٠	المركز الثانى = $\frac{٤ + ٨}{٢}$ = ٦ وهكذا
		٤٠	٤٥٠	$\overline{س} = \frac{مجـ س × ك}{مجـ ك} = \frac{٤٥٠}{٤٥} = ١٠$

ثانياً : نكون الجدول الآتى لكى نوجد الانحراف المعيارى σ

س	$\overline{س}$	(س - $\overline{س}$)	$(س - \overline{س})^2$	ك	$(س - \overline{س})^2 × ك$
٢	١٠	٨-	٦٤	٥	٣٢٠
٦	١٠	٤-	١٦	١٠	١٦٠
١٠	١٠	٠	٠	١٥	٠
١٤	١٠	٤	١٦	١٠	١٦٠
١٨	١٠	٨	٦٤	٥	٣٢٠
			١٦٠	٤٥	٩٦٠

الانحراف المعيارى

$$σ = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^2 × ك}{مجـ ك}}$$

$$= \sqrt{\frac{٩٦٠}{٤٥}} = ٤٫٦١٨$$

تدريب٣

أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى وأوجد الانحراف المعيارى :

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

[٢١ ، ٩٫٤٣٣]

مثال ٤

التوزيع التكرارى التالى يبين كمية الزيت التى تستهلكها مجموعة من السيارات:

عدد الكيلومترات لكل لتر	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥-١٧	المجموع
عدد السيارات	٦	٩	١٣	١٧	١١	٤	٦٠

كون جدول الانحراف المعيارى ، ثم احسب :

(١) **الوسط الحسابى** (٢) **الانحراف المعيارى**

الحل

أولاً : نوجد الوسط الحسابى :

المجموعات	المركز س	ك	س × ك
٥-	٦	٦	٣٦
٧-	٨	٩	٧٢
٩-	١٠	١٣	١٣٠
١١-	١٢	١٧	٢٠٤
١٣-	١٤	١١	١٥٤
١٥-	١٦	٤	٦١
		٦٠	٦٦٠

مركز المجموعة الأولى $= \frac{٥ + ٧}{٢} = ٦$

مركز المجموعة الثانية $= \frac{٧ + ٩}{٢} = ٨$

الوسط الحسابى $= \bar{س} = \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}}$

$= \frac{٦٦٠}{٦٠} = ١١$

ثانياً : نكون الجدول الآتى لإيجاد الانحراف المعيارى

س	$\bar{س}$	$(س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^٢$	ك	$(س - \bar{س})^٢ \times ك$
٦	١١	٥-	٢٥	٦	١٥٠
٨	١١	٣-	٩	٩	٨١
١٠	١١	١-	١	١٣	١٣
١٢	١١	١	١	١٧	١٧
١٤	١١	٣	٩	١١	٩٩
١٦	١١	٥	٢٥	٤	١٠٠
				٦٠	٤٦٠

الانحراف المعيارى =

$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})^٢ \times ك}{\text{مجـ ك}}}$

$= \sqrt{\frac{٤٦٠}{٦٠}} = ٢,٧٦٨$

تمـــاريـــن (٢)

أ — **ب**

(١) أوجد المدى لمجموعة القيم الآتية :

أ	ب
(١) ٥ ، ٤ ، ٢ ، ١٠ ، ٩	(١) ٦ ، ٨ ، ٧ ، ١١ ، ١٨ ، ١٠
(٢) ١٧ ، ١٨ ، ٩ ، ٧ ، ١٩	(٢) ٧ ، ٨ ، ٥ ، ١ ، ١٢ ، ١٤

(٢) ك م احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للقيم الآتية :

أ	ب
(١) ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧	(١) ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٦
(٢) ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩	(٢) ١٥ ، ٣٠ ، ٦٠ ، ١٨ ، ١٦
(٣) ١٥ ، ١٢٠ ، ٩٠ ، ٢٧ ، ٦٠	(٣) ٣٩ ، ٨٥ ، ٤٦ ، ٩١ ، ٨٨ ، ٥٠ ، ٧٧
(٤) ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٨	(٤) ٢٣ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٦ ، ٨ ، ٩ ، ٣٧ ، ١٠

أ)

(٣) ك م فيما يلى توزيع تكرارى بين أعمار ١٠ أطفال

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعيارى للعمر بالسنوات

[١,٧٣٢ ، ٩]

ب)

(٣) ك م التوزيع التكرارى التالى بين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة :

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال

[٠,٩٥٩ ، ٢]

أ)

(٤) أوجد الانحراف المعيارى

الدرجة	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
عدد الطلاب	١	٤	٥	٤	١	١٥

[٤ ، ٢]

ب)

(٤) أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

الدرجة	٤	٩	١٢	١٥	١٨	المجموع
التكرار	٦	٧	٨	٥	٤	٣٠

[١١ ، ٤,٤٩٤]

(٥) أكمل

(١) مركز المجموعة = $\frac{\text{الحد الأدنى} + \ldots\ldots}{٢}$

(٢) الوسط الحسابي من مقاييس النزعة المركزية أما المدى من مقاييس ....

(٣) من مقاييس التشتت ...... ، ......

(٤) المدى للقيم (٤ ، ٢ ، ٩ ، ١٥) هو .....

(٥) إذا كان مجموع $(س - \overline{س})^٢$ = ٤٥ ، حيث س هي القيم ، $\overline{س}$ وسطهما الحسابي فإذا كان عدد القيم = ٥ ، فإن الانحراف المعياري = ...

(٦) الانحراف المعياري للقيم ٥ ، ٦ ، ٧ يساوي $\sqrt{\frac{\ldots\ldots}{٣}}$

(٧) إذا كان ٧٨ هي أكبر مفردات مجموعة ، وإذا كان المدى يساوي ٣٩ ، فإن أصغر قيمة لمفردات هذه المجموعة يساوي ...

(٨) الانحراف المعياري لقيم متساوية = ...

(٩) إذا كان مجـ$(س - \overline{س})^٢$ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها يساوي ٩ فإن σ = ...

(٥) أكمل

(١) الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = ...

(٢) الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة بيانات يسمى ....

(٣) من مقاييس التشتت المدى و......

(٤) المدى للقيم (٩ ، ٦ ، ٥ ، ١٢) هو ......

(٥) الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربع انحرافات القيم عن وسطهما الحسابي يعطى ......

(٦) إذا كان مجموع مربع انحرافات عشرة قيم عن وسطهما الحسابي = ٢٥٠ ، فإن الانحراف المعياري لهذه القيم = ...

(٧) إذا كان المدى لمجموعة من القيم هو ٤٠ وكان أصغر القيم ١٧ ، فإن أكبر القيم يساوي ....

(٨) يكون الانحراف المعياري مساوياً صفر إذا كانت القيم ....

(٩) إذا كان مجموع مربع انحرافات عشرة قيم عن وسطها الحسابي تساوي ٢٥٠ ، فإن الانحراف المعياري للقيم = ...

(٦) احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع الآتى : (محافظة حلوان)

الدرجة	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٤	٨	٤	٢	٢٠

[١٠ ، ٦,١٦٤]

(٦) الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ طالب

السن	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

[٣١ ، ١١,٣٥٧]

(٧) الجدول الآتى يبين درجات تلاميذ فى الصف الثالث الإعدادى

الدرجة	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

[٣٠ ، ١٠,٧٢٣]

(٧) الجدول الآتى يبين درجات تلاميذ فى الصف الثالث الإعدادى

الدرجة	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٣	١٨	٧	١٠	٤٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

[٣٠ ، ١٠,٩٥٤]

(٨) التوزيع التكرارى بين أوزان ٥٠ طفلا بالكجم

الوزن	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

[٣١ ، ١٢,٨٤٥]

(٨) التوزيع التكرارى الآتى يبين كمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات

عدد الكيلومترات	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥-١٧	المجموع
عدد السيارات	٣	٦	١١	١٢	٤	٤	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الكيلومترات لكل متر

[١١ ، ٢,٦٨٣]

الابداع

فى

الرياضيات

ثانيا:- حساب المثلثات والهندسة

الوحده الرابعة : -

حساب المثلثات

(1) النسب المثلثية الاساسية للزاويه الحادة

(2) النسب المثلثية الاساسية لبعض الزوايا

الوحدة الرابعة

(١) "النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة"

* وحدات القياس الستيني للزاوية :-

هي الدرجة ويرمز لها بالرمز (1°) ، والدقيقة ويرمز لها بالرمز ($1'$) ، والثانية ويرمز لها بالرمز ($1''$) .

أي أن :- الزاوية التي قياسها ٤٥ درجة ، ١٥ دقيقة ، ١٠ ثواني تكتب "١٠ َ١٥ ٥ْ٤

وتكتب على الآلة الحاسبة من اليسار كالتالي 45 [° ' "] 15 [° ' "] 10 [° ' "] وتضغط (=) فتظهر بالشكل $45^\circ 15^\circ 10^\circ$

ملحوظة" $1^\circ = 60'$ & $1' = 60''$

مثال ①:- * اكتب بالدرجات ٢٢ َ٣٦ ً٤٨

* اكتب بالدرجات والدقائق والثواني ٨٣٫٦٢٥°

الحل :-

يمكن استخدام الحاسبة في إيجاد ذلك

* $\Rightarrow$ 22 [° ' "] 36 [° ' "] 48 [° ' "] = $22^\circ 36^\circ 48^\circ$ [° ' "] ينتج 22,613

* $\Rightarrow$ 83,625 = [° ' "] = $83^\circ 37^\circ 30^\circ$

مثال ②:- إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٢ : ٥ أوجد القياس الستيني لكل منهما .

الحل :-

نفرض قياس الزاويتين ٢س ، ٥س

$\therefore$ ٢س + ٥س = 90° $\Leftarrow$ ٧س = 90° $\xLeftarrow{(\div 7)}$ س ينتج ١٢٫٨٥٧

$\therefore$ قياس الزاوية الأولى = ٢ × ١٢٫٨٥٧ ينتج ٢٥٫٧١٤ [° ' "] ينتج ٥١ َ٤٢ ٥ْ٢

$\therefore$ قياس الزاوية الثانية = ٥ × ١٢٫٨٥٧ ينتج ٦٤٫٢٨٦ [° ' "] ينتج ٩ً َ١٧ ٦٤°

* تدريب * زاويتان متتامتان النسبة بينهما ٦ : ٥ أوجد القياس الستيني لكل منهما.

* النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة :-

هي نسبة بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الذي تقع فيه هذه الزاوية.

⇐ توجد ثلاث نسب مثلثية أساسية للزاوية الحادة وهي :-

① جيب الزاوية ويرمز لها بالرمز (جا) وبالإنجليزية (sin)

② جيب تمام الزاوية ويرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنجليزية (cos)

③ ظل الزاوية ويرمز لها بالرمز (ظا) وبالإنجليزية (tan)

* من الشكل المقابل :-
△ أ ب جـ قائم الزاوية في ب
⇐ بالنسبة للزاوية (جـ)

① جا جـ = المقابل / الوتر = أ ب / أ جـ

② جتا جـ = المجاور / الوتر = ب جـ / أ جـ

③ ظا جـ = المقابل / المجاور = أ ب / ب جـ

* من الشكل المقابل :-
△ أ ب جـ قائم الزاوية في ب
⇐ بالنسبة للزاوية (أ)

① جا أ = المقابل / الوتر = ب جـ / أ جـ

② جتا أ = المجاور / الوتر = أ ب / أ جـ

③ ظا أ = المقابل / المجاور = ب جـ / أ ب

مثال ② :- في الشكل المقابل :-
△ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ

الحل

⇐ بالنسبة للزاوية (جـ)

① جا جـ = ٣/٥

② جتا جـ = ٤/٥

③ ظا جـ = ٣/٤

⇐ بالنسبة للزاوية (أ)

① جا أ = ٤/٥

② جتا أ = ٣/٥

③ ظا أ = ٤/٣

من المثال السابق نلاحظ أنه :-

① جا ج = جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا ج = جا أ = $\frac{٤}{٥}$

وأن ق(∠أ) + ق(∠ج) = ٩٠°

• نستنتج أنه :- إذا كان ∠أ ، ∠ب زاويتين حادتين وكان جا أ = جتا ب

فإن ق(∠أ) + ق(∠ب) = ٩٠° "والعكس صحيح"

② $\frac{\text{جا ج}}{\text{جتا ج}} = \frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٤}$ ، ظا ج = $\frac{٣}{٤}$ أي أن ظا ج = $\frac{\text{جا ج}}{\text{جتا ج}}$

• نستنتج أنه :- ظل الزاوية = $\frac{\text{جيب الزاوية}}{\text{جيب تمام الزاوية}}$

مثال ④ :- في △ أ ب ج ، ∠أ ، ∠ب حادتان وكان جا أ = جتا ب

ق(∠أ) = ٥٠° أوجد ق(∠ب)

الحل :- ∵ ∠أ ، ∠ب حادتان ، جا أ = جتا ب ∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ب) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠° #

مثال ⑤ :- في الشكل المقابل أوجد الدوال المثلثية الآتية :-

جا أ ، جتا أ ، جا ج ، جتا ج ، ظا أ ، ظا ج

(الشكل: مثلث أ ب ج قائم في ب ، أ ج = ٤١ سم ، ب ج = ٤٠ سم)

الحل :-

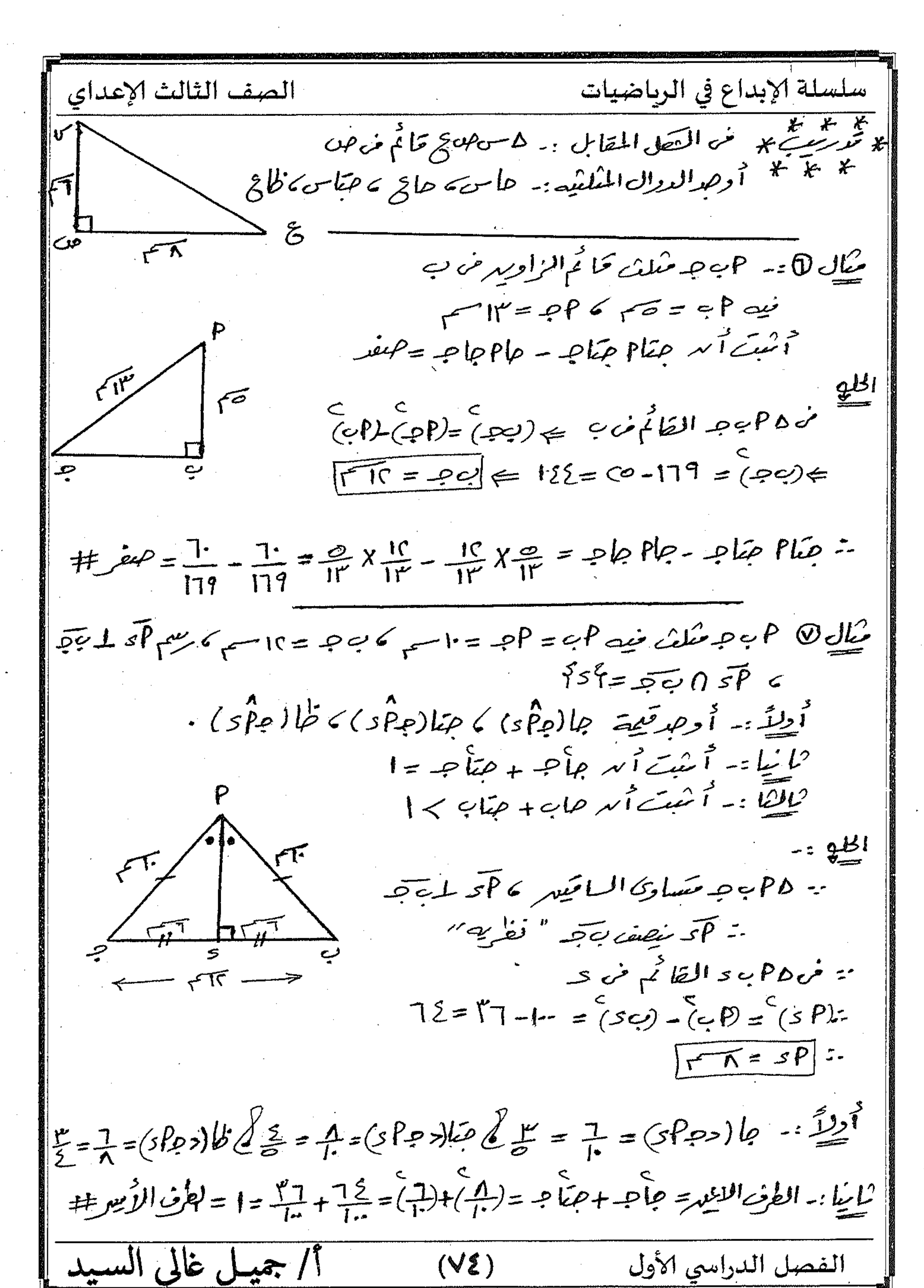
← يمكن إيجاد طول الضلع أب من نظرية فيثاغورث

في △ أ ب ج القائم في ب

⇐ (أب)^٢ = (أج)^٢ − (ب ج)^٢ ⇐ (أب)^٢ = (٤١)^٢ − (٤٠)^٢ = ١٦٨١ − ١٦٠٠

⇐ (أب)^٢ = ٨١ ⇐ أب = $\sqrt{٨١}$ = ٩ ∴ أب = ٩ سم

* جا أ = $\frac{٤٠}{٤١}$	* جا ج = $\frac{٩}{٤١}$	* ظا أ = $\frac{٤٠}{٩}$
* جتا أ = $\frac{٩}{٤١}$	* جتا ج = $\frac{٤٠}{٤١}$	* ظا ج = $\frac{٩}{٤٠}$



*** تدريب *** من الشكل المقابل :- Δ س ص ع قائم في ص
أوجد الدوال المثلثية :- جا س ، جا ع ، جتا س ، ظا ع

مثال ① :- أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
فيه أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ١٣ سم
أثبت أن جتا أ جتا جـ - جا أ جا جـ = صفر

الحل

في Δ أ ب جـ القائم في ب ⇐ (ب جـ)² = (أ جـ)² - (أ ب)²
⇐ (ب جـ)² = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤ ⇐ ب جـ = ١٢ سم

∴ جتا أ جتا جـ - جا أ جا جـ = ٥/١٣ × ١٢/١٣ - ١٢/١٣ × ٥/١٣ = ٦٠/١٦٩ - ٦٠/١٦٩ = صفر #

مثال ② أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، أ د ⊥ ب جـ
، أ د ∩ ب جـ = {د}
أولاً :- أوجد قيمة جا (جـ أ د) ، جتا (جـ أ د) ، ظا (جـ أ د) .
ثانياً :- أثبت أن جا² جـ + جتا² جـ = ١
ثالثاً :- أثبت أن جا ب + جتا ب > ١

الحل :-

∵ Δ أ ب جـ متساوي الساقين ، أ د ⊥ ب جـ
∴ أ د ينصف ب جـ "نظرية"
∴ في Δ أ ب د القائم في د
∴ (أ د)² = (أ ب)² - (ب د)² = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤
∴ أ د = ٨ سم

أولاً :- جا (جـ أ د) = ٦/١٠ = ٣/٥ ، جتا (جـ أ د) = ٨/١٠ = ٤/٥ ، ظا (جـ أ د) = ٦/٨ = ٣/٤

ثانياً :- الطرف الأيمن = جا² جـ + جتا² جـ = (٨/١٠)² + (٦/١٠)² = ٦٤/١٠٠ + ٣٦/١٠٠ = ١ = الطرف الأيسر #

ثالثاً :- حاب + جتاب = $\frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = \frac{١٤}{١٠}$ = ١٫٤ > ١ #

مثال ⑧ أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه أ د // ب جـ ،
أ د = ٤ سم ، أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم
أثبت أن $\frac{\text{ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^2\text{جـ} + \text{جتا}^2\text{ب}}$ = ٣ وأوجد مساحة شبه المنحرف .

الحل :-

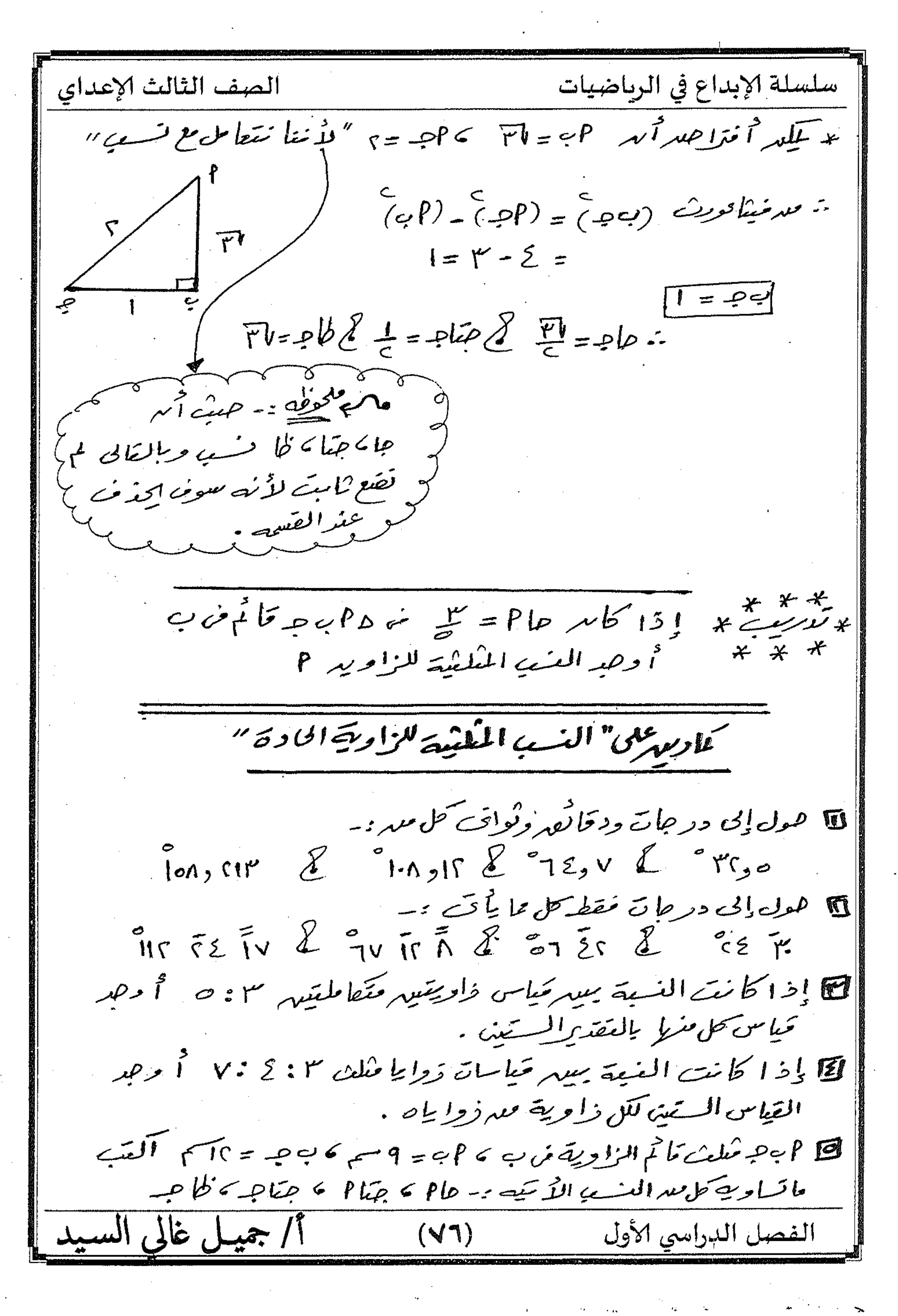
العمل :- نرسم أ هـ ، د و أعمدة على ب جـ
فيكون الشكل أ هـ و د مستطيل
∴ أ د = هـ و = ٤ سم
← نلاحظ أن △ أ هـ ب ≡ △ د و جـ
" ضلع ووتر في مثلث قائم "
∴ ب هـ = و جـ = $\frac{١٢-٤}{٢}$ = ٤ سم
← ومن فيثاغورث ⇐ أ هـ = ٣ سم ∵ أ هـ = د و " من التطابق " ∴ د و = ٣ سم

* الطرف الأيمن = $\frac{\text{ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^2\text{جـ} + \text{جتا}^2\text{ب}} = \frac{\frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}}{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}} = \frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٢٥}{٢٥}}$ = ٣ = الطرف الأيسر #

* مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع
∴ مساحة أ ب جـ د = $\frac{١}{٢}$ (أ د + ب جـ) × أ هـ = $\frac{١}{٢}$ (٤ + ١٢) × ٤
= $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٤ = ٣٢ سم² #

مثال ⑨ أ ب جـ مثلث قائم في ب فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ
أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

الحل :-
∵ ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ ⇐ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ " من خواص النسبة "



* يمكن افتراض أن أ ب = $\sqrt{3}$ ، أ جـ = ٢ "لأننا نتعامل مع نسب"

∴ من فيثاغورث $(ب جـ)^2 = (أ جـ)^2 - (أ ب)^2$

= ٤ − ٣ = ١

ب جـ = ١

∴ جا جـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جتا جـ = $\frac{1}{2}$ ، ظا جـ = $\sqrt{3}$

ملحوظة :- حيث أن جا ، جتا ، ظا نسب وبالتالي لم تضع ثابت لأنه سوف يحذف عند القسمة.

*** تدريب *** إذا كان جا أ = $\frac{3}{5}$ في Δ أ ب جـ قائم في ب أوجد النسب المثلثية للزاوية أ

تمارين على "النسب المثلثية للزاوية الحادة"

١ حول إلى درجات ودقائق وثواني كل من :-

٣٢٫٥° ، ٦٤٫٧° ، ١٠٨٫١٢° ، ١٥٨٫٢١٣°

٢ حول إلى درجات فقط كل مما يأتي :-

٣٠َ ٢٤° ، ٤٢َ ٥٦ً ، ٨ً ١٢َ ٩٧° ، ١٧ً ٢٤َ ١١٢°

٣ إذا كانت النسبة بين قياس زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ أوجد قياس كل منها بالتقدير الستيني.

٤ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث ٣ : ٤ : ٧ أوجد القياس الستيني لكل زاوية من زواياه.

٥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ١٢ سم أكتب ما تساويه كل من النسب الآتية :- جا أ ، جتا أ ، جتا جـ ، ظا جـ

[٦] من الشكل المقابل :-
أثبت أن جتا ج جتا ب - جا ج جا ب = صفر

(أ ب = ٢٠ سم ، أ ج = ١٥ سم ، الزاوية أ قائمة)

[٧] س ص ع مثلث قائم في ص ، س ص = ٥ سم
س ع = ١٣ سم أوجد قيمة :-
① ظا س + ظا ع ② جتا س جتا ع - جا س جا ع ③ جا س جتا ع + جتا س جا ع

[٨] في الشكل المقابل :-
(أ ب = أ ج = ١٣ سم ، ب ج = ١٠ سم)
أوجد قيمة :- ① جتا ب جتا ج + جا ب جا ج .
② جتا² ب - جا² ب + ٢ جا ج جتا ج .

[٩] إذا كان أ ب ج مثلث قائم في ب
وكان ١٣ أ ب = ١٥ أ ج أثبت أن جا أ جتا ج + جتا أ جا ج = ١

[١٠] في الشكل المقابل :-
أ ب ج مثلث قائم في ب
أ ب = ٦ سم ، ظا ج = $\frac{٣}{٤}$
أوجد :- ① طول كل من ب ج ، أ ج
② جا أ + جتا أ

---

[١١]
أ ب ج د شبه منحرف فيه أ د // ب ج ، ق(∠ب) = ٩٠° ،
أ ب = ٣ سم ، أ د = ٦ سم ، ب ج = ١٠ سم

أثبت أن جتا(∠د ج ب) - ظا(∠أ ج ب) = $\frac{١}{٢}$

---

(٢) "النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا"

* سوف ندرس هذا العام النسب المثلثية الأساسية للزوايا ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°
والجدول التالي يوضح ذلك :-

"احفظ هذه الدوال جيداً"

الدالة المثلثية / قياس الزاوية	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	١

نلاحظ :- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

"ملاحظة هامة جداً"
جا ٣٠° = جتا ٦٠°
جا ٦٠° = جتا ٣٠°
أي أن :-
جا الزاوية = جتا المتممة
جتا الزاوية = جا المتممة

مثال ① :- أوجد قيمة جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° - جتا² ٣٠° بدون الحاسبة

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1^{\times 2}}{2_{\times 2}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2+1-3}{4} = \frac{\text{صفر}}{4} = \boxed{\text{صفر}}$$

مثال ② :- أوجد قيمة $\frac{\text{جتا}^2 ٦٠° + \text{جتا}^2 ٣٠° + \text{ظا}^2 ٤٥°}{\text{جا } ٦٠° \text{ ظا } ٦٠° - \text{جا } ٣٠°}$

الحل :-

$$\text{المقدار} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

مثال ③ :- أثبت أن $ظا^2 ٦٠° - ظا^2 ٣٠° = (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) \div جتا^2 ٣٠°$

الحل :-

* الطرف الأيمن $= ظا^2 ٦٠° - ظا^2 ٣٠° = (\sqrt{٣})^2 - (\frac{١}{\sqrt{٣}})^2 = ٣ - \frac{١}{٣} = \boxed{\frac{٨}{٣}} \longrightarrow ①$

* الطرف الأيسر $= (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) \div جتا^2 ٣٠° = (١ + \sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}) \div (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^2$

$= (١+١) \div \frac{٣}{٤} = ٢ \div \frac{٣}{٤} = ٢ \times \frac{٤}{٣} = \boxed{\frac{٨}{٣}} \longrightarrow ②$

من ① ، ② ينتج أن الطرفان متساويان #.

مثال ④ :- أوجد قيمة س التي تحقق أن :-

أ- $س جا ٣٠° جتا^2 ٤٥° = جتا^2 ٣٠°$ ب- $٢جا س = ظا^2 ٦٠° - ٢ظا ٤٥°$ حيث س زاوية حادة

الحل :-

أ- $\because س جا ٣٠° جتا^2 ٤٥° = جتا^2 ٣٠°$

$\therefore س \times \frac{١}{٢} \times (\frac{١}{\sqrt{٢}})^2 = (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^2 \Leftarrow س \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$

$\Leftarrow س \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤} \xLeftarrow{\times ٤} \boxed{س = ٣}$

ب- $\because ٢جا س = ظا^2 ٦٠° - ٢ظا ٤٥° \Leftarrow ٢جا س = (\sqrt{٣})^2 - ٢ \times ١$

$\Leftarrow ٢جا س = ٣ - ٢ = ١ \Leftarrow ٢جا س = ١ \xLeftarrow{\div ٢} جا س = \frac{١}{٢}$

• نبحث عن الزاوية التي جيبها يساوي $\frac{١}{٢} \Leftarrow \boxed{س = ٣٠°}$

*** تدريب ***

① أوجد قيمة $جا ٦٠° ظا ٦٠° - ظا^2 ٤٥° - جتا^2 ٤٥°$

② أوجد س حيث $س جتا ٣٠° = ظا ٦٠°$

③ أوجد س حيث $ظا س = \frac{٢ظا ٣٠°}{١ - ظا^2 ٣٠°}$ ، س حادة

* استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد الدوال المثلثية :-

① إيجاد النسب المثلثية لزاوية معلومة :-

* يمكن إيجاد قيمة جا ٣٠° باستخدام الحاسبة كالتالي

$\rightarrow \overset{on}{\Rightarrow} \sin(30) = \frac{1}{2}$

مثال ①:- باستخدام الحاسبة أوجد قيمة الآتي مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :-

① جا ٧٢° & ② جتا ٦٥° & ③ ظا ٤٥ً ١٢َ ٨٢°

الحل :-

① جا ٧٢° ≃ ٠,٩٥١ $\rightarrow \sin(72) \simeq 0.951$

② جتا ٦٥° ≃ ٠,٤٢٣ $\rightarrow \cos(65) \simeq 0.423$

③ ظا ٤٥ً ١٢َ ٨٢° ≃ ٧,٣١٢ $\rightarrow \tan(82^{\circ\prime\prime\prime}\ 12^{\circ\prime\prime\prime}\ 45^{\circ\prime\prime\prime}) \simeq 7.312$

---

② إيجاد قياس زاوية إذا علمت إحدى نسبها المثلثية

* إذا كان جا هـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإنه يمكن إيجاد ق(هـ) باستخدام الحاسبة كالتالي

$\rightarrow \overset{on}{\Rightarrow}$ shift $\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 60^\circ$

مثال ②:- أوجد ق(∠هـ) في كل مما يأتي باستخدام الحاسبة :-

① جا هـ = ٠,٧ & ② جتا هـ = ٠,٨٥٢ & ③ ظا هـ = ٢,٤١

الحل :-

① جا هـ = ٠,٧ ⇐ ق(هـ) ≃ ٤٤ً ٢٥َ ٤٤° $\rightarrow$ shift $\sin(0.7) =$

② جتا هـ = ٠,٨٥٢ ⇐ ق(هـ) ≃ ٣١ً ٣٤َ ٢١° $\rightarrow$ shift $\cos(0.852) =$

③ ظا هـ = ٢,٤١ ⇐ ق(هـ) ≃ ٥٣ً ٢٧َ ٦٧° $\rightarrow$ shift $\tan(2.41) =$

مثال ⑦ :- في الشكل المقابل أ ب جـ د مستطيل فيه :-
أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ١٣ سم أوجد :-
① ق(∠ أ جـ ب)
② مساحة المستطيل أ ب جـ د لأقرب رقم عشري واحد

الحل :-

① ∵ أ ب جـ د مستطيل ∴ ق(∠ب) = ٩٠°
في △ أ ب جـ القائم في ب ⇐ جا(∠ أ جـ ب) = المقابل / الوتر = أ ب / أ جـ = ٦ / ١٣
باستخدام الحاسبة :-
shift sin $(\frac{6}{13})$ = °′″ 27° 29′ 11″ ق(∠ أ جـ ب) ≃ ١١َ ٢٩َ ٢٧° .

②
يلزم إيجاد طول ب جـ من فيثاغورث ⇐ (ب جـ)٢ = (أ جـ)٢ - (أ ب)٢
⇐ (ب جـ)٢ = ١٦٩ - ٣٦ = ١٣٣ ⇐ ب جـ = √١٣٣ سم

∴ مساحة المستطيل أ ب جـ د = الطول × العرض = أ ب × ب جـ = ٦ × √١٣٣ ≃ ٦٩,٢ سم٢

" تمارين على النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا "

١ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :-

① جا ٣٠° - جتا ٦٠°
② جا ٤٥° - جتا ٤٥°
③ جتا ٦٠° + جا ٣٠°
④ ظا ٤٥° جا ٣٠°
⑤ ٤ جتا ٣٠° ظا ٦٠°
⑥ ظا٢ ٦٠° + جتا ٦٠° - ظا ٤٥°
⑦ ½ جا ٤٥° جا ٦٠° - ¾ جا ٦٠° ظا ٣٠°
⑧ (ظا٢ ٣٠° ظا ٤٥° + ظا ٣٠° ظا ٦٠°) / (جا٢ ٦٠° - ظا ٤٥° جا ٣٠°)

---

٢ بدون استخدام الحاسبة اثبت أن :-

① جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°
② جتا ٦٠° = ٢ جتا٢ ٣٠° - ١
③ ظا ٦٠° = ٢ ظا ٣٠° / (١ - ظا٢ ٣٠°)
④ جتا٢ ٦٠° = ٥ جا٢ ٣٠° - ظا٢ ٤٥°

[٣] اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان س حادة وكان جا س = $\frac{1}{2}$ فإن جا ٢س = ... [١ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$]

② إذا كان س حادة وكان ٢جا س = ظا ٦٠° فإن ق(س) = ... [٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°]

③ إذا كان جا ٢س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن س = ...° حيث ٢س حادة [٣٠° ، ٣٠ ، ٤٥° ، ٦٠°]

④ إذا كان جتا(س + ١٠)° = $\frac{1}{2}$ فإن س = ...° [٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠° ، ٧٠°]

⑤ ظا ٧٥° = ... [$\frac{\text{جتا ٧٥°}}{\text{جا ٧٥°}}$ ، $\frac{\text{جا ٧٥°}}{\text{جتا ٧٥°}}$ ، ٣ ظا ٢٥°]

---

[٤] أوجد قيمة س من كل مما يأتي :-

① ٤س = جتا² ٣٠° ظا² ٣٠° ظا² ٤٥°

② ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠° "حيث س زاوية حادة"

③ جا س = جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° "حيث س زاوية حادة"

④ ٢جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° "حيث س زاوية حادة"

---

[٥] △ أ ب جـ متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٢,٦ سم ، ق(∠جـ) = ٤٤° ٢٤َ أوجد لأقرب رقم عشري واحد طول ب جـ

[٦] من الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٥ سم ، أ جـ = ٢٥ سم أوجد :-

① ق(∠أ جـ ب)

② مساحة المستطيل أ ب جـ ء

[٧] من الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء متوازي أضلاع مساحته ٩٦ سم² ، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣ ، أ هـ ⊥ ب جـ ، أ هـ = ٨ سم

أوجد :-

① طول أ ء

② ق(∠ب)

③ طول أ ب لأقرب رقم عشري واحد.

[٨] سلم أ ب طوله ٦ أمتار يستند بطرفه العلوي أ على حائط رأسي وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كان مسقط أ على الأرض هو جـ ، وكان قياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٠° أوجد طول أ جـ "بطريقتين مختلفتين"

الوحدة الخامسة : -

الهندسة

(1) البعد بين نقطتين

(2) احداثيات منتصف قطعة مستقيمة

(3) ميل الخط المستقيم

معادله الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

اختبار الوحدة

" الوحدة الخامسة "

(١) البعد بين نقطتين

* إذا كان أ = ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب = ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن :-

البعد بين النقطتين أ ، ب = $\sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2}$

أي أن البعد بين النقطتين أ ، ب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$

ملحوظة :- الترتيب ليس ضروري لأن القيمة تربيع أي أن $(س_٢ - س_١)^2 = (س_١ - س_٢)^2$

معـ البعد بين النقطتين أ ، ب هو طول $\overline{أب}$

مثال ① :- أوجد طول $\overline{أب}$ في كل مما يأتي :-

ⓐ أ (٥ ، ٤) ، ب (١ ، ١) ⓑ أ (١ ، ٢) ، ب (٧ ، ١٠) ⓒ أ (-٢ ، -١) ، ب (١ ، ٤-)

الحل :-

ⓐ طول $\overline{أب} = \sqrt{(٥-١)^2 + (٤-١)^2} = \sqrt{٤^2 + ٣^2} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول.

ⓑ طول $\overline{أب} = \sqrt{(١-٧)^2 + (٢-١٠)^2} = \sqrt{(-٦)^2 + (-٨)^2} = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ وحدة طول.

ⓒ طول $\overline{أب} = \sqrt{(-٢-١)^2 + (-١+٤)^2} = \sqrt{(-٣)^2 + (٣)^2} = \sqrt{٩+٩} = \sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول.

*** تدريب *** أوجد طول $\overline{سص}$ إذا كان س = (٥ ، ٣) ، ص = (١ ، ٠)

مثال ② :- أثبت أن المثلث الذي رءوسه النقط أ (١ ، -٢) ، ب (-٤ ، ٢) ، ج (١ ، ٦) متساوي الساقين.

الحل نوجد البعد بين كل نقطتين أي طول $\overline{أب}$ ، طول $\overline{بج}$ ، طول $\overline{أج}$ "أضلاع المثلث"

أب = $\sqrt{(١+٤)^٢ + (-٢-٢)^٢} = \sqrt{٥^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٢٥+١٦} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول.

ب جـ = $\sqrt{(-٤-١)^٢ + (٢-٦)^٢} = \sqrt{(-٥)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٢٥+١٦} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول.

أ جـ = $\sqrt{(١-١)^٢ + (-٢-٦)^٢} = \sqrt{٠^٢ + (-٨)^٢} = \sqrt{٠+٦٤} = \sqrt{٦٤} = ٨$ وحدة طول.

∵ أب = ب جـ ∴ △ أب جـ متساوي الساقين #

ملحوظة: البعد بين النقطة أ(س١، ص١) ونقطة الأصل (٠، ٠) هو: $\sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢}$

مثال ③: إذا كان أ ب جـ مثلثاً حيث أ(٠، ٠)، ب(٣، ٤)، جـ(-٤، ٣) أوجد محيط △ أب جـ

الحل:

محيط △ أب جـ = أب + ب جـ + أ جـ "مجموع أطوال أضلاعه"

أب = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = \sqrt{١٦+٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

أ جـ = $\sqrt{(-٤)^٢ + ٣^٢} = \sqrt{١٦+٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(٣+٤)^٢ + (٤-٣)^٢} = \sqrt{٧^٢ + ١^٢} = \sqrt{٤٩+١} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ محيط △ أب جـ = ٥ + ٥ + $٥\sqrt{٢}$ = (١٠ + $٥\sqrt{٢}$) وحدة طول

ملحوظة هامة: لإثبات أن أي ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة "تقع على مستقيم واحد" نوجد البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن أكبر بعد يساوي مجموع البعدين الآخرين.

مثال ④: أثبت أن النقط أ(٣، ٧)، ب(١، ١)، جـ(٠، -٢) تقع على استقامة واحدة

الحل: أب = $\sqrt{(٣-١)^٢ + (٧-١)^٢} = \sqrt{٤+٣٦} = \sqrt{٤٠} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول،

ب ج $= \sqrt{(١-٠)^٢ + (١+٢)^٢} = \sqrt{١+٩} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

أ ج $= \sqrt{(٣-٠)^٢ + (٧+٢)^٢} = \sqrt{٩+٨١} = \sqrt{٩٠} = ٣\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∵ $٣\sqrt{١٠} = ٢\sqrt{١٠} + \sqrt{١٠}$ أي أن أ ج = أ ب + ب ج

∴ النقط أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة

"ملاحظات هامة"

① لإثبات أن النقط أ ، ب ، ج هي رؤوس مثلث نوجد أ ب ، ب ج ، أ ج
ثم نثبت أن مجموع طولي أصغر ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

② تعيين نوع المثلث حسب قياسات زواياه :-

← "بفرض أن أ ج يمثل الضلع الأكبر في المثلث أ ب ج"

- إذا كان $(أج)^٢ = (أب)^٢ + (بج)^٢$ فإن المثلث قائم الزاوية في ب .
- إذا كان $(أج)^٢ > (أب)^٢ + (بج)^٢$ فإن المثلث منفرج الزاوية في ب .
- إذا كان $(أج)^٢ < (أب)^٢ + (بج)^٢$ فإن المثلث حاد الزوايا .

مثال ⑤ :- أثبت أن النقط أ(١، ٤) ، ب(٤، ٨) ، ج(٥، ١)
هي رؤوس مثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته .

الحل :-

أ ب $= (٤-١)^٢ + (٨-٤)^٢ = ٩ + ١٦ = ٢٥ = ٥$ وحدة طول ← $(أب)^٢ = ٢٥$ وحدة مربعة

ب ج $= (٤-٥)^٢ + (٨-١)^٢ = ١ + ٤٩ = ٥٠ = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول ← $(بج)^٢ = ٥٠$ وحدة مربعة

أ ج $= (١-٥)^٢ + (٤-١)^٢ = ١٦ + ٩ = ٢٥ = ٥$ وحدة طول ← $(أج)^٢ = ٢٥$ وحدة مربعة

∵ مجموع طولي أصغر ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث "$٥ + ٥ > ٥\sqrt{٢}$"

∴ أ ، ب ، ج تمثل رؤوس مثلث

∵ $(بج)^٢ = (أب)^٢ + (أج)^٢$ ∴ Δ أ ب ج قائم في أ

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ

= $\frac{1}{2}$ × ٥ × ٥ = ١٢,٥ وحدة مربعة .

*** تدريب *** اثبت أن Δ أ ب جـ قائم الزاوية وأوجد مساحته حيث :-
أ (٣ ، ٢) ، ب (-٤ ، ١) ، جـ (٢ ، -١) .

"ملاحظات هامة" لإثبات أن أى شكل رباعى :-

① متوازى أضلاع ← نثبت أن كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول .
② مستطيل ← نثبت أن كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول ، والقطران متساويان .
③ معين ← نثبت أن جميع الأضلاع متساوية فى الطول .
④ مربع ← نثبت أن جميع الأضلاع متساوية فى الطول ، والقطران متساويان .

مثال ⑦ :- اثبت أن النقط أ (٥ ، ٣) ، ب (٦ ، -٢) ، جـ (١ ، -١) ، د (٠ ، ٤)
هى رؤوس معين وأوجد مساحة سطحه .

الحل :-

أ ب = $\sqrt{(٥-٦)^٢ + (٣+٢)^٢}$ = $\sqrt{١ + ٢٥}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول .

ب جـ = $\sqrt{(٦-١)^٢ + (-٢+١)^٢}$ = $\sqrt{٢٥ + ١}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول .

جـ د = $\sqrt{(١-٠)^٢ + (-١-٤)^٢}$ = $\sqrt{١ + ٢٥}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول .

أ د = $\sqrt{(٥-٠)^٢ + (٣-٤)^٢}$ = $\sqrt{٢٥ + ١}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول .

∴ أ ب = ب جـ = جـ د = د أ ∴ الشكل أ ب جـ د معين

* مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

∴ لابد من ايجاد القطرين أ جـ ، ب د

أ جـ = $\sqrt{(٥-١)^٢ + (٣+١)^٢}$ = $\sqrt{١٦ + ١٦}$ = $\sqrt{٣٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$ وحدة طول .

ب د = $\sqrt{(٦-٠)^٢ + (-٢-٤)^٢}$ = $\sqrt{٣٦ + ٣٦}$ = $\sqrt{٧٢}$ = ٦$\sqrt{٢}$ وحدة طول .

∴ مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ × أجـ × ب د = $\frac{1}{2}$ × ٤$\sqrt{٢}$ × ٦$\sqrt{٢}$ = ٢٤ وحدة مربعة

*** تدريب *** أثبت أن النقط أ(٣، -٢)، ب(-٥، ٠)، جـ(٠، -٧)، د(٨، -٩) هي رؤوس متوازي أضلاع ومثله بيانيا على الشبكة التربيعية .

مثال ⑦ إذا كان أ ب جـ د مربع وكان أ(٠، ٢)، جـ(-٩، ٣) أوجد مساحة سطح المربع

الحل :-

∵ مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ (قطره)^2 ∵ أجـ يمثل قطر المربع أ ب جـ د

∴ مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ (أجـ)^2

أجـ = (٠+٩)^2 + (٢-٣)^2 = ٨١+١ = ٨٢ وحدة طول

∴ مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ × ($\sqrt{٨٢}$)^2 = $\frac{1}{2}$ × ٨٢ = ٤١ وحدة مربعة

"ملحوظة هامة" لإثبات أن النقط أ، ب، جـ، .... تقع على دائرة واحدة مركزها (م) نثبت أن م أ = م ب = م جـ = ...
"أنصاف أقطار"

* من الشكل المقابل :-

طول نصف قطر الدائرة (نق) = م أ = م ب = م جـ

• محيط الدائرة = ٢ ط نق ، مساحة الدائرة = ط نق^2

*** تدريب *** أثبت أن النقط أ(-٦، ٢)، ب(٠، ٨)، جـ(-٨، ٤) تقع على الدائرة التي مركزها م حيث م(-٤، ٦) وأوجد مساحتها حيث (ط = ٣,١٤)

"فكرة حل التدريب" نوجد م أ ، م ب ، م جـ ونثبت أنها متساوية في الطول

مثال ⑧ إذا كان بعد النقطة (س، ٥) عن النقطة (١، ٦) يساوي ٢√٥
أوجد قيمة س .

الحل :-

∵ البعد بين النقطتين (س، ٥)، (١، ٦) يساوي ٢√٥

∴ ٢√٥ = √((س-١)^٢ + (٥-١)^٢) بتربيع الطرفين

⇐ (س-٦)^٢ + (٥-١)^٢ = ٤ × ٥

⇐ س^٢ - ١٢س + ٣٦ + ١٦ = ٢٠ ⇐ س^٢ - ١٢س + ٥٢ = ٢٠ (-٢٠)

⇐ س^٢ - ١٢س + ٣٢ = ٠ بالتحليل (س - ٨)(س - ٤) = ٠

إما س - ٨ = ٠ ⟵ س = ٨ | أو س - ٤ = ٠ ⟵ س = ٤

∴ قيمة س = ٨ أو ٤

تمارين على " البعد بين نقطتين "

[1] أكمل ما يأتي :-

① البعد بين النقطتين (١، ٢)، (٤، ٦) يساوي ....

② البعد بين النقطة (-٣، ٤) ونقطة الأصل يساوي ......

③ إذا كان أ (٢، -٣)، ب (-١، ١) فإن أب = ...

④ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٠)، (٠، ١) هو وحدة طول واحدة فإن أ = ...

⑤ طول قطر الدائرة التي مركزها (٧، ٤) وتمر بالنقطة (٣، ١) يساوي ......

⑥ بعد النقطة (٣، -٥) عن محور السينات = ... وحدة طول

---

[2] أختر الإجابة الصحيحة :-

① دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول فأي من النقط الآتية تنتمي إلى الدائرة [(١، ٢)، (-٢، ٢)، (√٣، ١)، (√٢، ١)]

[١٣] أثبت أن النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :-

① أ(٢ ، ١) ، ب(٣ ، -٢) ، جـ(١ ، ٤) ② أ(٦ ، ٣) ، ب(٢ ، ١) ، جـ(-٨ ، -٤)

[١٤] أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ(٥ ، -٥) ، ب(-١ ، ٧) ، جـ(١٥ ، ١٥) قائم الزاوية في ب ثم أحسب مساحته.

[١٥] إذا كانت أ(-١ ، -١) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(٦ ، ٠) أثبت أن △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب واحسب مساحته.

[١٦] بين نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لزواياه حيث أ(١ ، -١) ، ب(٢ ، ١) ، جـ(-٣ ، -٢)

[١٧] أثبت أن النقط أ(-٢ ، ٤) ، ب(٥ ، -٣) ، جـ(٧ ، ١) ، د(٠ ، ٨) هي رؤوس متوازي أضلاع.

[١٨] أثبت أن النقط أ(٠ ، ١) ، ب(٤ ، ٥) ، جـ(١ ، ٨) ، د(-٣ ، ٤) هي رؤوس مستطيل ثم أحسب طول قطره ومساحته.

[١٩] أثبت أن النقط أ(٣ ، ٣) ، ب(٠ ، ٣) ، جـ(٠ ، ٠) ، د(٣ ، ٠) هي رؤوس مربع ثم أحسب طول قطره ومساحته.

[٢٠] أثبت أن النقط أ(٣ ، -١) ، ب(-٤ ، ٦) ، جـ(٢ ، -٢) تقع على دائرة واحدة مركزها م(-١ ، ٢) ثم أحسب محيط الدائرة حيث ($\pi = 3.14$) .

[٢١] إذا كان البعد بين النقطتين أ(ل ، ٠) ، ب(٠ ، ٤) يساوي ٥ وحدة طول أوجد قيمة ل .

[٢٢] إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (-٢ ، ٣) يساوي ٥ وحدة طول أوجد قيمة أ .

[٢٣] إذا كان أ(س ، ٣) ، ب(٣ ، ٢) ، جـ(٥ ، ١) وكان أب = ب جـ أوجد قيمة س .

(٣) "إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة"

* إذا كان أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) فإن :-

إحداثي منتصف أب = (مجموع السينات / ٢ ، مجموع الصادات / ٢) = ((س١ + س٢) / ٢ ، (ص١ + ص٢) / ٢)

مثال ① :- إذا كان أ = (٢ ، ٥) ، ب = (٤ ، ١) أوجد إحداثي منتصف أب

الحل :-

إحداثي نقطة المنتصف = ((٢ + ٤) / ٢ ، (٥ + ١) / ٢) = (٣ ، ٢)

مثال ② :- إذا كان جـ (١٠ ، -٤) هي نقطة منتصف أب حيث أ(٤ ، -٢)
أوجد إحداثي نقطة ب

الحل :-

نفرض أن ب = (س ، ص)   ∵ جـ منتصف أب

∴ (١٠ ، -٤) = ((٤ + س) / ٢ ، (-٢ + ص) / ٢)

∴ ١٠ = (٤ + س) / ٢ ⇐ ٢٠ = ٤ + س   ∴ س = ١٦

∵ -٤ = (-٢ + ص) / ٢ ⇐ -٨ = -٢ + ص   ∴ ص = -٦

∴ إحداثي نقطة ب = (١٦ ، -٦)

مثال ③ إذا كان أ(٣ ، ٥) منتصف القطعة ب جـ حيث ب = (س ، ٥)
، جـ = (-٤ ، ص) أوجد قيمة س ، ص

الحل :-

∵ أ هي منتصف ب جـ ⇐ (٣ ، ٥) = ((س - ٤) / ٢ ، (٥ + ص) / ٢)

⇐ ٣ = (س - ٤) / ٢ ⇐ ٦ = س - ٤ ⇐ **س = ١٠**

$\Leftarrow$ ٥ = $\frac{\text{ص}+٥}{٢}$ $\Leftarrow$ ١٠ = ص + ٥ $\Leftarrow$ **ص = ٥**

*** تدريب ***

① إذا كانت أ = (٤، -٣)، ب = (٢، -٥) أوجد منتصف $\overline{\text{أب}}$.

② إذا كانت (٢، ٤) هي منتصف القطعة التي طرفاها (س، ٥)، (٣، ص) فأوجد قيمة س، ص.

مثال ④ :- إذا كان $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م حيث أ(٤، -١)، ب(-٢، ٧) أوجد إحداثي نقطة م ومن ثم أوجد محيط الدائرة ومساحتها.

الحل :-

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م ∴ م منتصف $\overline{\text{أب}}$

∴ نقطة م = $\left(\frac{٤+(-٢)}{٢} ، \frac{-١+٧}{٢}\right) = \left(\frac{٤-٢}{٢} ، \frac{-١+٧}{٢}\right)$ = (١، ٣)

* إيجاد مساحة ومحيط الدائرة :-

أ = (٤، ١)

نق = أم = $\sqrt{(٤-١)^٢ + (١+٣)^٢} = \sqrt{٩+١٦}$ = ٥ وحدة طول ، م = (١، ٣)

∴ مساحة الدائرة = ط نق² = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢٥ ≃ ٧٨٫٥ وحدة مربعة.

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥ ≃ ٣١٫٤ وحدة طول.

مثال ⑤ :- إذا كان أ = (-٢، ٤)، ب(٥، -٣)، جـ(٧، ٤)، د(٠، ١١) أثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

الحل :-

∵ القطران ينصف كل منهما الآخر في متوازي الأضلاع

∴ يجب إثبات أن نقطة منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ هي نقطة منتصف $\overline{\text{ب د}}$

* نقطة منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = $\left(\frac{-٢+٧}{٢} ، \frac{٤+٤}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، ٤\right)$ ← ①

* نقطة منتصف $\overline{\text{ب د}}$ = $\left(\frac{٥+٠}{٢} ، \frac{-٣+١١}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، ٤\right)$ ← ②

من ①، ② ينتج أن نقطة منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = نقطة منتصف $\overline{\text{ب د}}$

∵ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

مثال ⑥ :- اثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل حيث أ $(-1 ، 3)$ ، ب $(1 ، 1)$ ، جـ $(-2 ، -2)$ ، د $(-4 ، 0)$

* لكي نثبت أن الشكل مستطيل نثبت أولاً أنه متوازي أضلاع ثم نثبت أن القطران متساويان في الطول

الحل :-

* نقطة منتصف أجـ $= \left(\frac{-1-2}{2} ، \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ ①
* نقطة منتصف ب د $= \left(\frac{1-4}{2} ، \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ ②

من ① ، ② الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

أجـ $= \sqrt{(-1+2)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ وحدة طول.

ب د $= \sqrt{(1+4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ وحدة طول.

∵ أجـ = ب د "القطران متساويان" ∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل #

---

* **تدريب** * إذا كان أ $(0 ، 6)$ ، ب $(7 ، -1)$ ، جـ $(9 ، 6)$ ، د $(2 ، 13)$ اثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

مثال ⑦ :- اثبت أن النقط أ $(5 ، 1)$ ، ب $(1 ، -3)$ ، جـ $(-5 ، 3)$ هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد احداثي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيل.

الحل :-

① أب $= \sqrt{(1-5)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ وحدة طول ⇐ $(\text{أب})^2 = 32$ وحدة مربعة.

② ب جـ $= \sqrt{(-5-1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$ وحدة طول ⇐ $(\text{ب جـ})^2 = 72$ وحدة مربعة.

③ أجـ $= \sqrt{(-5-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104}$ وحدة طول ⇐ $(\text{أجـ})^2 = 104$ وحدة مربعة.

من ① ، ② ، ③ ينتج أن $(\text{أجـ})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{ب جـ})^2$ ∴ △ أ ب جـ قائم في ب #

نفرض أن د = (س ، ص) بحيث يكون الشكل مستطيل

∵ أ جـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر

∴ نقطة منتصف أ جـ = نقطة منتصف ب د

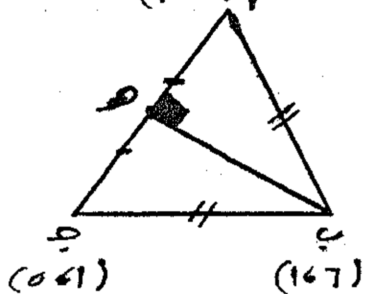
((٥-٥)/٢ ، (٣+١)/٢) = ((س+١)/٢ ، (ص-٣)/٢) ⇐ (٠ ، ٢) = ((س+١)/٢ ، (ص-٣)/٢)

⇐ (س+١)/٢ = ٠ ⇐ س + ١ = ٠ ⇐ **س = -١**

⇐ (ص-٣)/٢ = ٢ ⇐ ص - ٣ = ٤ ⇐ **ص = ٧**

∴ احداثي د = (-١ ، ٧) #

مثال ⑧ :- أثبت أن Δ أ ب جـ متساوي الساقين حيث أ(١ ، -٣) ، ب(٦ ، ١) ، جـ(١ ، ٥) وأوجد احداثي نقطة هـ منتصف أ جـ ثم احسب مساحة Δ أ ب جـ .



الحل :-

أ ب = √((١-٦)² + (-٣-١)²) = √(٢٥ + ١٦) = √٤١ وحدة طول . ①

ب جـ = √((٦-١)² + (١-٥)²) = √(٢٥ + ١٦) = √٤١ وحدة طول . ②

أ جـ = √((١-١)² + (-٣-٥)²) = √(٠ + ٦٤) = ٨ وحدة طول .

من ① ، ② ∴ أ ب = ب جـ ∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين #

∵ هـ منتصف أ جـ ⇐ هـ = ((١+١)/٢ ، (-٣+٥)/٢) = (١ ، ١)

∵ أ ب = ب جـ ، ∵ هـ منتصف أ جـ ∴ ب هـ ⊥ أ جـ "نظرية"

ب هـ = √((٦-١)² + (١-١)²) = √٢٥ = ٥ وحدة طول

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ½ × أ جـ × ب هـ = ½ × ٨ × ٥ = ٢٠ وحدة مربعة #

تمارين على "احداثي منتصف قطعة مستقيمة"

[١] أوجد إحداثي نقطة منتصف أب في كل من الحالات الآتية :-

① أ(٢، ٤) ، ب(٦، ٠) ② أ(٧، -٦) ، ب(-١، ٠)

③ أ(٤، ٣) ، ب(٢، ٧) ④ أ(-٤، -٤) ، ب(٠، -٢)

[٢] إذا كانت جـ منتصف أب فأوجد س ، ص في كل من الحالات الآتية :-

① أ(١، ٥) ، ب(٣، ٧) ، جـ(س، ص) ② أ(-٣، ص) ، ب(٩، ١١) ، جـ(س، -٣)

③ أ(س، -٦) ، ب(٩، -١١) ، جـ(-٣، ص) ④ أ(س، -٦) ، ب(٦، ص) ، جـ(٤، ٦)

[٣] إذا كان أ(٦، ٠) ، ب(٢، -٤) ، جـ(-٤، ٢) أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ثم أوجد احداثي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيل.

[٤] إذا كان أ(-١، -٦) ، ب(٩، ٢) أوجد إحداثيات النقط التي تقسم أب الى أربعة أجزاء متساوية في الطول.

[٥] أثبت أن △أ ب جـ متساوي الساقين حيث أ(-٣، ٠) ، ب(٣، ٤) ، جـ(١، -٦) ثم أوجد طول العمود المرسوم من أ عمودي على ب جـ وأوجد مساحة △أ ب جـ.

[٦] إذا كان أ(-٢، ٤) ، ب(٥، -٣) ، جـ(٧، ٠) ، د(٠، ٧) أثبت أن أ ب جـ د متوازي أضلاع.

[٧] أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ(٣، ٤) ، ب(٢، -١) ، جـ(-٤، -٣) أوجد إحداثي د ، خذ هـ ∈ أد حيث أهـ = ٢ أد ما إحداثيا النقطة هـ ؟

[٨] اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان أ(٧، -٤) ، ب(-١، ٠) فإن منتصف أب .... [(٣، ٢) ، (٣، -٢) ، (-٣، ٢)]

② إذا كان جـ(٢، ١) هي منتصف أب حيث ب(٣، ٠) فإن أ ..... [(١، ٢) ، (٢، ١) ، (١، ٥)]

[٩] أكمل ما يأتي :-

① إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف أب حيث أ(٥، -٢) فإن احداثيا ب ....

② إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أربع نقاط على استقامة واحدة وكان أب = ب جـ = جـ د ، أ(١، ٣) ، جـ(٥، ١) فإن إحداثي النقطة ب(.....، .....) ، النقطة د(.....، .....)

③ أد متوسط في △أ ب جـ ، م منتصف أد حيث أ(٠، ٨) ، ب(٣، ٢) ، جـ(-٣، ٦) فإن د(.....، .....) ، م(.....، .....) .

(٣) "ميل الخط المستقيم"

* ميل الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ هو :-

$$\text{الميل} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \quad \text{حيث } س_١ \neq س_٢$$

مثال ①: ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين أ (٤ ، ٣) ، ب (٥ ، ٦)

أ (٤ ، ٣) ← $(س_١ ، ص_١)$

ب (٥ ، ٦) ← $(س_٢ ، ص_٢)$

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٣}{٥ - ٤} = \frac{٣}{١} = \boxed{٣}$$

ملحوظة :- ① ميل أى مستقيم أفقى "يوازى محور السينات" = صفر .

② ميل أى مستقيم رأسى "يوازى محور الصادات" غير معرف .

---

* تعريف قياس الزاوية :- هو مدى انفراج الضلع النهائى "المتحرك" عن الضلع الابتدائى "الثابت"

ضلع نهائى
ضلع ابتدائى

* يكون قياس الزاوية موجباً إذا تحرك الضلع النهائى ضد عقارب الساعة

ضلع ابتدائى
ضلع نهائى

* يكون قياس الزاوية سالباً إذا تحرك الضلع النهائى مع عقارب الساعة .

"تعريف" :- ميل المستقيم :- هو ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

ص
س
هـ

أى أن $\boxed{م = ظا هـ}$

حيث هـ هى قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

* تصنيف الميل :- سوف نعتبر الضلع الإبتدائي "الثابت" هو الإتجاه الموجب لمحور السينات :-

* يكون الميل موجباً :- إذا كان المستقيم يصنع زاوية "حادة" مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .
* يكون الميل سالباً :- إذا كان المستقيم يصنع زاوية "منفرجة" مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .
* يكون الميل صفراً :- إذا كان المستقيم "يوازي" محور "السينات" .
* يكون الميل غير معرفاً :- اذا كان المستقيم "يوازي" محور "الصادات" .

مثال ② :- أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب للسينات قياسها :-

٤٥° ، ١٣٥° ، ٣٢ َ ١٢ ً ٥٤°

الحل :-

• م = ظاهـ = ظا ٤٥° = ١ ⇐ م = ١ .
• م = ظاهـ = ظا ١٣٥° = -١ ⇐ م = -١ .
• م = ظاهـ = ظا ٣٢ َ ١٢ ً ٥٤° ≃ ١٫٣٨٧ ⇐ م ≃ ١٫٣٨٧ .

مثال ③ :- باستخدام الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم الذي ميله "م" مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث :-

أ- م = ٠٫٥٤ ، ب- م = ٣٫٤٤ ، جـ- م = $-\frac{1}{37}$

الحل :-

ⓐ ∵ م = ظاهـ ⇐ ظاهـ = ٠٫٥٤ ⇒shift tan (0.54) = [°'"]

∴ ق(∠هـ) ≃ ٢٨ ٣٢ ٩ °

ⓑ ∵ م = ظاهـ ⇐ ظاهـ = ٣٫٤٤ ⇒shift tan (3.44) = [°'"]

∴ ق(∠هـ) ≃ ٧٣ ٤٧ ٢٨ °

(جـ) ∵ م = ظاهـ ⇐ ظاهـ = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

∵ الميل سالب ⇐ ∠هـ منفرجة

$\Rightarrow shift\ \tan(-1/\sqrt{3}) = -30^\circ$

∴ ق(∠هـ) = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

مثال ④ :- أوجد قياس الزاوية الموجبة هـ التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (−٢، ٢√٣) ، (١، ٤√٣)

الحل :-

∵ المستقيم يمر بالنقطتين (−٢، ٢√٣) ، (١، ٤√٣)

∴ م = $\frac{٤\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{١ - (-٢)}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$ = √٣ ⇐ م = √٣

$\Rightarrow shift\ \tan(\sqrt{3}) = 60^\circ$

∴ ق(∠هـ) = ٦٠°

---

* "العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين"

الشكل المقابل يوضح أن المستقيمين ل١ ، ل٢ متوازيان ميلاهما م١ ، م٢ على الترتيب ، وعلى ذلك يكون

ق(∠هـ١) = ق(∠هـ٢)

∴ ظاهـ١ = ظاهـ٢ ⇐ م١ = م٢

∴ إذا كان ل١ // ل٢ ⇐ م١ = م٢

∴ **شرط توازي مستقيمان هو م١ = م٢**

مثال ① أثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٣، ٤) ، (٥، ٦) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل :- ميل المستقيم الأول م١ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٦ - ٤}{٥ - ٣}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١ ⟵ ①

ميل المستقيم الثاني م٢ = ظا ٤٥° = 1 ⟵ ②

من ①، ② ينتج أن م١ = م٢ ∴ المستقيمان متوازيان #

مثال ②: إذا كان المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٢، ٥)، (-١، ٣) يوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين (س، ٣)، (-٢، ١) أوجد قيمة س.

الحل:

ميل المستقيم الأول م١ = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{٥-٣}{٢+١}$ = $\frac{٢}{٣}$ ⇐ م١ = $\frac{٢}{٣}$ ⟵ ①

ميل المستقيم الثاني م٢ = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{٣-١}{س+٢}$ = $\frac{٢}{س+٢}$ ⇐ م٢ = $\frac{٢}{س+٢}$ ⟵ ②

∵ المستقيمان متوازيان ∴ م١ = م٢

⇐ $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٢}{س+٢}$ ⇐ س + ٢ = ٣ ⇐ س = ١ #

مثال ③: أثبت أن النقط أ(١، ٣)، ب(-١، -١)، جـ(٢، ٥) تقع على استقامة واحدة

الحل:

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-١-٣}{-١-١}$ = $\frac{-٤}{-٢}$ = ٢ ⟵ ①

∵ ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{٥+١}{٢+١}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ ⟵ ②

من ①، ② ينتج أن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ النقط أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة #

أ، ب، جـ
* لإثبات أن ثلاثة نقط تقع على استقامة واحدة نثبت أن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$
أو البعد = مجموع البعدين الآخرين
"كما في درس البعد بين نقطتين"

تدريب: أثبت أن النقط أ(٥، ٣)، ب(٣، ٢)، جـ(١، ١) تقع على استقامة واحدة.

مثال ④: أثبت أن النقط أ(٣، ٤)، ب(٧، ٣)، جـ(-١، -١)، د(-١، ٢) على الترتيب تمثل شبه منحرف.

الحل :-

* شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان

ميل أب $= \frac{٤-٣}{٣-٧} = \frac{-١}{٤}$

ميل ب جـ $= \frac{-١-٣}{-١-٧} = \frac{-٤}{-٨} = \frac{١}{٢}$ ⟵

ميل أ د $= \frac{٤-٢}{٣+١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ⟵

ميل جـ د $= \frac{٢+١}{-١+١} = \frac{٣}{٠}$ غير معرف

∵ ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ∴ $\overleftrightarrow{أد}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ∦ $\overleftrightarrow{جـ د}$

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف #

*** تدريب *** إذا كان المستقيم ل١ المار بالنقطتين (٣،١) ، (ك،٥) يوازي المستقيم ل٢ الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متوازيان فأوجد قيمة ك.

---

* العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين :-

* إذا كان ل١ ، ل٢ مستقيمان ميلاهما م١ ، م٢ على الترتيب

⇐ إذا كان ل١ ⊥ ل٢ ⟺ م١ × م٢ = -١ أي م١ $= -\frac{١}{م٢}$ أي م٢ $= \frac{-١}{م١}$

∴ شرط تعامد مستقيمان هو م١ × م٢ = -١

مثال ① اثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٣،٢) ، (٥،١) عمودي على المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٥،١) ، (٦،٣).

الحل :-

م١ $= \frac{١-٢}{٥-٣} = -\frac{١}{٢}$ ، م٢ $= \frac{٣-١}{٦-٥} = ٢$

∵ م١ × م٢ $= -\frac{١}{٢} \times ٢ = -١$ ∴ المستقيمان متعامدان #

* تدريب * اثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢)
* * عمودي على المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ٣٠°.

"ملاحظات هامة لحل مسائل الأشكال الرباعية"

* لإثبات أن الشكل الرباعي شبه منحرف نثبت أن :-
ضلعين متقابلين فيه متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين.

* لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع نثبت إحدى الخواص الآتية :-
① كل ضلعين متقابلين متوازيان "عن طريق الميل".
② كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول "عن طريق البعد بين نقطتين".
③ ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول.
④ القطران ينصف كل منهما الآخر "عن طريق منتصف قطعة مستقيمة".

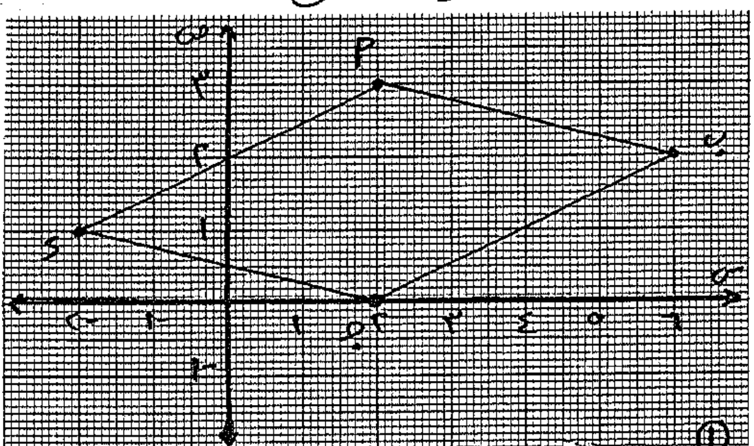
* لإثبات أن الشكل الرباعي مستطيل أو معين أو مربع فإننا نثبت أولاً أن هذا الشكل متوازي أضلاع كما سبق ، ثم :-

- لإثبات أن متوازي الأضلاع هو مستطيل نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :-
① ضلعان متجاوران فيه متعامدان "عن طريق الميل"
② القطران متساويان في الطول "عن طريق البعد بين نقطتين"

- لإثبات أن متوازي الأضلاع هو معين نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :-
① ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول.
② القطران متعامدان.

- لإثبات أن متوازي الأضلاع هو مربع نثبت إحدى الخواص الآتية :-
① ضلعان متجاوران فيه متعامدان ومتساويان في الطول.
② ضلعان متجاوران فيه متعامدان ، والقطران متعامدان.
③ القطران متساويان في الطول ، ومتعامدان
④ ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول وقطراه متساويان في الطول.

مثال ② على مستوى إحداثي متعامد مثل النقط أ(٢، ٣)، ب(٦، ٢)، ج(٢، ٠)، د(-٢، ١) ثم اثبت أن الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع.



الحل :-

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢-٣}{٦-٢} = -\frac{١}{٤}$

ميل $\overleftrightarrow{دج} = \frac{٠-١}{٢-(-٢)} = -\frac{١}{٤}$

ميل $\overleftrightarrow{أد} = \frac{٣-١}{٢-(-٢)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

ميل $\overleftrightarrow{بج} = \frac{٢-٠}{٦-٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{دج}$ ⇐ $\overline{أب} // \overline{دج}$ ①

∵ ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = ميل $\overleftrightarrow{بج}$ ⇐ $\overline{أد} // \overline{بج}$ ②

∵ من ①، ② كل ضلعين متقابلين متوازيان ∴ الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع #

مثال ③ :- إذا كان المثلث الذي رؤوسه أ(٣، ٣)، ب(١، -١)، ج(-١، ص) قائم الزاوية في أ أوجد قيمة ص ثم أوجد مساحة المثلث أ ب ج.

الحل :-

∵ Δ أ ب ج قائم في أ ∴ $\overline{أج} \perp \overline{أب}$

أي أن ميل $\overleftrightarrow{أج}$ × ميل $\overleftrightarrow{أب} = -١$

ميل $\overleftrightarrow{أج} = \frac{ص-٣}{-١-٣} = \frac{ص-٣}{-٤}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{-١-٣}{١-٣} = \frac{-٤}{-٢} = ٢$

∴ $\frac{ص-٣}{-٤} \times ٢ = -١$ ⇐ $\frac{ص-٣}{-٢} = -١$ ⇐ ص - ٣ = ٢ ⇐ **ص = ٥**

أو $\frac{ص-٣}{-٤} = \frac{-١}{٢}$ ⇐ ٢ص - ٦ = ٤ ⇐ ٢ص = ١٠ ⇐(÷٢) **ص = ٥**

* مساحة Δ أ ب ج = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ أب × أج

أب = $\sqrt{(٣-١)^٢ + (٣+١)^٢} = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

$أ جـ = \sqrt{(٣+١)^٢ + (-٣-٥)^٢} = \sqrt{١٦+٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

∴ مساحة △ أ ب جـ $= \frac{1}{2} \times \sqrt{٢٠} \times \sqrt{٢٠} = \frac{1}{2} \times ٢٠ = ١٠$ وحدة مربعة.

*** تدريب *** إذا كان المثلث الذى رؤوسه هى (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥) ، ع (-٥ ، أ) قائم فى ص أوجد قيمة أ ومساحة △ أ ب جـ.

تمارين على " ميل الخط المستقيم "

[١] أكمل ما يأتى :-

① شرط توازى مستقيمان ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ هو .... ، بينما شرط التعامد هو ....

② المستقيم الذى ميله $\frac{٢}{٧}$ يوازى المستقيم الذى ميله ....

③ المستقيم الذى ميله $\frac{٣}{٤}$ عمودى على المستقيم الذى ميله ....

④ المستقيم الذى ميله -٤ عمودى على المستقيم الذى ميله ....

⑤ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات يساوى .... ، بينما ميل المستقيم الموازى للصادات ....

⑥ ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥° هو ....

⑦ إذا كان $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جـ د}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ = ...

⑧ ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (-١ ، -٢) يساوى ....

⑨ △ أ ب جـ قائم فى ب فيه أ (١ ، ٥) ، ب (٠ ، ١) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = ...

⑩ أ ب جـ د متوازى أضلاع حيث أ (-١ ، ٤) ، ب (٠ ، ١) فإن ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$ = ...

⑪ إذا كان أ ب جـ د مربعاً قطراه $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب د}$ حيث أ (٣ ، ٥) ، جـ (٥ ، -١) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب د}$ = ...

⑫ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور السينات حيث أ (٨ ، ٣) ، ب (٢ ، ك) فإن ك = ...

⑬ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ يوازى محور الصادات حيث جـ (م ، ٤) ، د (-٥ ، ٧) فإن م = ...

⑭ إذا كان ميل خط مستقيم أكبر من الصفر فإن نوع الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تكون ....

⑮ إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متوازيين فإن ($م_١ - م_٢ = ٠$) ( ) ضع ✓ أو ✗

(١٦) المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ يكونان ....

(١٧) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ٣) والمستقيم الذي يصنع زاوية ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدان فإن أ = ...

---

[٢] أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها أ- ٣٠° ، ب- ٤٥° ، جـ- ١٢ ٣٥°

[٣] أوجد قياس الزاوية الموجبة الذي يصنعها المستقيم الذي ميله ٢٤٦. وا مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

[٣] أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (-٣ ، ٤) ، ب (-٣ ، -٢) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين س (١ ، ٢) ، ص (-٣ ، ٢) .

[٤] أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -١) ، (٦ ، ٣) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

[٥] إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـد}$ يوازي محور السينات حيث جـ (٤ ، ٢) ، د (-٥ ، ص) فأوجد ص .

[٦] إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي محور الصادات حيث أ (س ، ٧) ، ب (٣ ، ٥) فأوجد س .

[٧] إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان :-
(أ) متوازيان ، (ب) متعامدان

[٨] أثبت أن النقط أ (-١ ، ٤) ، ب (-٢ ، ٢) ، جـ (-٣ ، ٠) تقع على استقامة واحدة .

[٩] إذا كانت النقط أ (٠ ، ١) ، ب (أ ، ٣) ، جـ (٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ .

[١٠] إذا كان أ (-١ ، -١) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٦ ، ٠) أثبت أن △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب .

[١١] أثبت أن النقط أ (-١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٢) ، د (٥ ، ٦) هي رؤوس لمتوازي الأضلاع أ ب جـ د .

[١٢] أثبت أن النقط أ (٥ ، ١) ، ب (١ ، ٥) ، جـ (-١ ، ٣) ، د (٣ ، -١) هي رؤوس المستطيل أ ب جـ د .

[١٣] أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{دجـ}$ ، أ (٩ ، -٢) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (س ، س) ، د (٤ ، -٣) أوجد إحداثيا نقطة جـ .

[١٤] أثبت أن النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (٧ ، ٠) ، جـ (١ ، -٢) هي رؤوس مثلث وإذا كانت نقطة د (١ ، ٢) فأثبت أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف وأوجد النسبة بين طول $\overline{أد}$ ، $\overline{بجـ}$

(٤) "معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات"

* أولاً :- إيجاد ميل المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات .

* إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة [ص = م س + جـ] فإن :-

ميل الخط المستقيم = م ، طول الجزء المقطوع من محور الصادات = |جـ|
والمستقيم يمر بالنقطة (٠ ، جـ)

مثلاً :- ① المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س + ٣
ميله = ٢ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات طولية
ويمر بالنقطة (٠ ، ٣) .

② المستقيم الذى معادلته ص = $-\frac{1}{2}$ س − ٧
ميله = $-\frac{1}{2}$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٧ وحدات طولية
ويمر بالنقطة (٠ ، −٧)

---

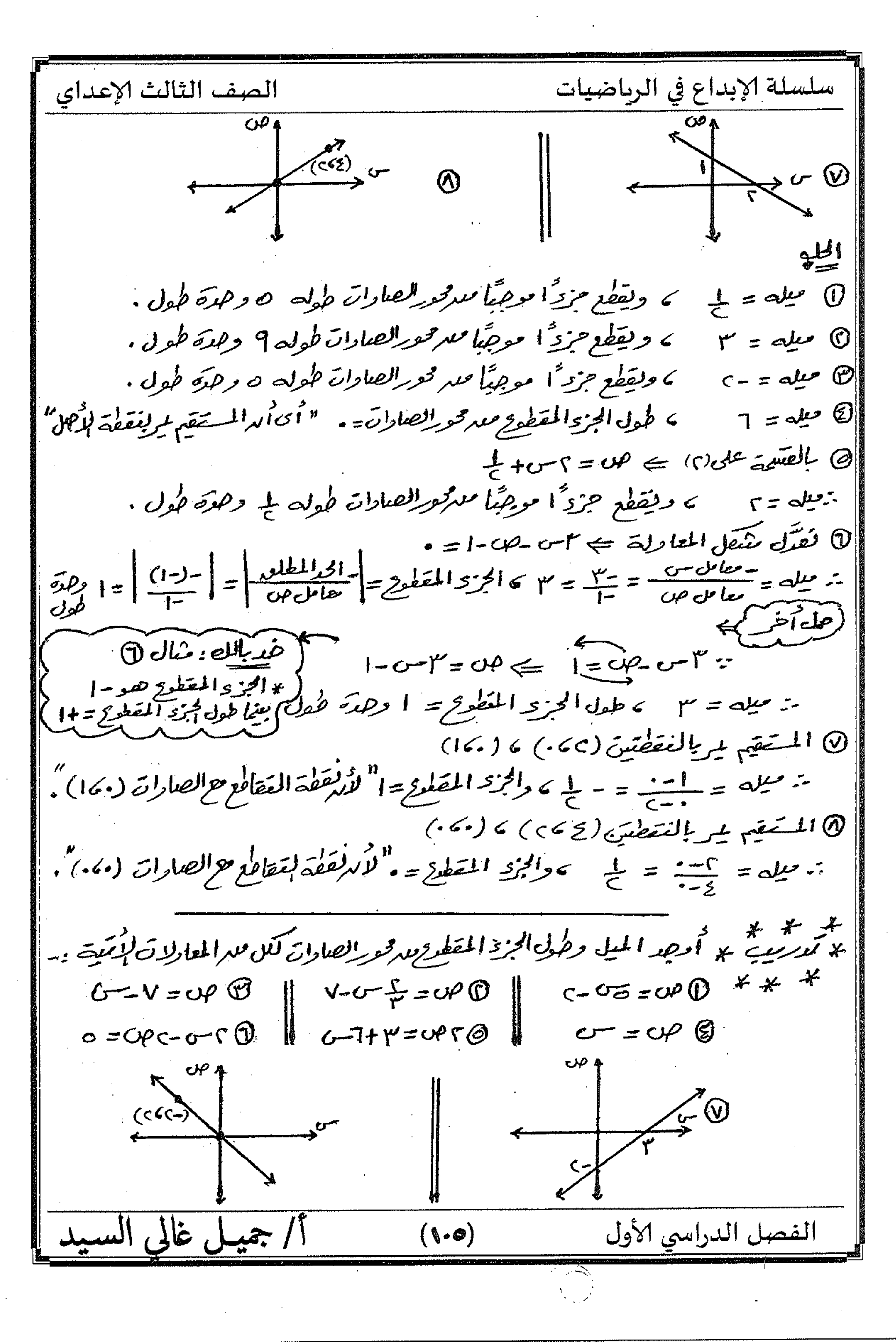
* إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة [أ س + ب ص + جـ = ٠] فإن :-

ميل الخط المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-أ}{ب}$ ، طول الجزء المقطوع من الصادات = $\left|\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right|$ (جـ / ب)

مثلاً :- ① المستقيم الذى معادلته ٢ س + ٣ ص + ٥ = ٠
ميله = $\frac{-2}{3}$ ، طول الجزء المقطوع من محور الصادات $\frac{5}{3}$ وحدة طول .

مثال ① :- أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات لكل من المعادلات الآتية :-

① ص = $\frac{1}{2}$ س + ٥	② ص = ٣ س + ٩	③ ص = ٥ − ٢ س
④ ص = ٦ س	⑤ ٢ ص = ٤ س + ١	⑥ ٣ س − ص = ١



⑦ (شكل: مستقيم يقطع محور الصادات عند ١ ومحور السينات عند ٢) ‖ ⑧ (شكل: مستقيم يمر بنقطة الأصل والنقطة (٤، ٢))

الحل

① ميله = $\frac{1}{2}$ ، ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله ٥ وحدة طول.

② ميله = ٣ ، ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله ٩ وحدة طول.

③ ميله = -٢ ، ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله ٥ وحدة طول.

④ ميله = ٦ ، طول الجزء المقطوع من محور الصادات = ٠ . "أي أن المستقيم يمر بنقطة الأصل"

⑤ بالقسمة على (٢) ⇐ ص = ٢س + $\frac{1}{2}$

∴ ميله = ٢ ، ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله $\frac{1}{2}$ وحدة طول.

⑥ نعدل شكل المعادلة ⇐ ٣س - ص - ١ = ٠

∴ ميله = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-١}$ = ٣ ، الجزء المقطوع = $\left|\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right| = \left|\frac{-(-١)}{-١}\right|$ = ١ وحدة طول

حل آخر ⇐

∴ ٣س - ص = ١ ⇐ ص = ٣س - ١

∴ ميله = ٣ ، طول الجزء المقطوع = ١ وحدة طول

> خد بالك: مثال ⑥
> * الجزء المقطوع هو -١ بينما طول الجزء المقطوع = +١

⑦ المستقيم يمر بالنقطتين (٢، ٠) ، (٠، ١)

∴ ميله = $\frac{١ - ٠}{٠ - ٢}$ = $-\frac{1}{2}$ ، والجزء المقطوع = ١ "لأن نقطة التقاطع مع الصادات (٠، ١)".

⑧ المستقيم يمر بالنقطتين (٤، ٢) ، (٠، ٠)

∴ ميله = $\frac{٢ - ٠}{٤ - ٠}$ = $\frac{1}{2}$ ، والجزء المقطوع = ٠ "لأن نقطة التقاطع مع الصادات (٠، ٠)".

---

* تدريب * أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات لكل من المعادلات الآتية :-

① ص = ٥س - ٢ ‖ ② ص = $\frac{2}{3}$ س - ٧ ‖ ③ ص = ٧ - س

④ ص = س ‖ ⑤ ٣ص = ٣ + ٦س ‖ ⑥ ٢س - ٢ص = ٥

⑦ (شكل: مستقيم يقطع محور السينات عند ٣ ومحور الصادات عند -٢) ‖ (شكل: مستقيم يمر بنقطة الأصل والنقطة (-٢، ٢))

مثال ② :- اختر الإجابة الصحيحة :-

① ميل المستقيم الذي معادلته ٢ص = ٦س + ١ هو .... [-٣ ، ٣ ، ٦ ، -٦]

② إذا كان المستقيمان ٣ص + س - ٧ = ٠ ، ص = ك س + ٥ متعامدان فإن ك = ... [٣ ، -٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٣}$]

③ المستقيم الذي معادلته ٣س - ٣ص + ٥ = ٠ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها .... [٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ١٣٥°]

الإجابة :-

① ٣ ② ٣ ③ ٤٥°

مثال ③ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٧) ، (٩ ، ٣) عموديًا على المستقيم الذي معادلته س + ك ص - ١٣ = ٠ فأوجد قيمة ك .

الحل :-

ميل المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٧) ، (٩ ، ٣) = $\frac{٣-٧}{٩+١} = \frac{-٤}{١٠} = \frac{-٢}{٥}$

∴ م١ = $\frac{-٢}{٥}$

ميل المستقيم الذي معادلته س + ك ص - ١٣ = ٠ هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{ك}$

∴ م٢ = $\frac{-١}{ك}$

∵ المستقيمان متعامدان ⟸ م١ × م٢ = -١

⟸ $\frac{-٢}{٥} \times \frac{-١}{ك} = -١$ ⟸ $\frac{٢}{٥ك} = -١$ ⟸ -٥ك = ٢ ⟸ (÷ -٥) ك = $\frac{-٢}{٥}$ #

*** ثانيًا :- إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات .**

* المستقيم الذي ميله (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) أي يمر بالنقطة (٠ ، جـ) تكون معادلته على الصورة :-

ص = م س + جـ

مثال ① أكتب معادلة المستقيم الذي :-

(أ) ميله = ٥ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله ٦ وحدة طول .

(ب) ميله = −١ والجزء المقطوع هو −٤ .

(ج) ميله = ٤ ويمر بنقطة الأصل .

(د) يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والجزء المقطوع هو ٤

الحل :-

(أ) ∵ م = ٥ ، جـ = ٦ ⇐ ص = م س + جـ ⇐ ص = ٥ س + ٦ .

(ب) ∵ م = −١ ، جـ = −٤ ⇐ ص = م س + جـ ⇐ ص = −س − ٤ .

(ج) ∵ م = ٤ ، جـ = ٠ ⇐ ص = م س + جـ ⇐ ص = ٤ س .

(د) ∵ م = ظا ٤٥° = ١ ، جـ = ٤ ⇐ ص = م س + جـ ⇐ ص = س + ٤ .

"ملاحظات هامة"

① معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) هي "ص = م س" حيث م هو الميل .

② معادلة محور السينات هي "ص = ٠" ، بينما معادلة محور الصادات هي "س = ٠" .

③ معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ل) هي "ص = ل" .

④ معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (ك ، ٠) هي "س = ك" .

⑤ لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات من أي معادلة نضع س = ٠ ونأتي بقيمة ص فتكون نقطة التقاطع مع محور الصادات هي (٠ ، ......) .

⑥ لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات من أي معادلة نضع ص = ٠ ونأتي بقيمة س فتكون نقطة التقاطع مع محور السينات هي (...... ، ٠) .

⑦ يكون المستقيمان متوازيين إذا ضرب معامل س ومعامل ص في عدد ثابت مثل :-
س + ص = ٥ ، ٢ س + ٢ ص = ٨ ، −٣ س −٣ ص = ١

⑧ يكون المستقيمان منطبقين إذا ضربت جميع حدود المعادلتين في عدد ثابت مثل :-
س + ص = ٣ ، ٥ س + ٥ ص = ١٥ .

مثال ⑫ :- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، -١) ، (٢، ٢)

الحل :-

نفرض أن معادلة المستقيم تكون على الصورة ص = م س + جـ

∵ م = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{٢ + ١}{٢ - ١}$ = ٣ ⇐ م = ٣

∴ تصبح معادلة المستقيم على الصورة ص = ٣ س + جـ ⟵ ✱

∵ (١، -١) ∈ للمستقيم ∴ تحقق معادلته ∴ بالتعويض بالنقطة في ✱

∴ -١ = ٣ × ١ + جـ ⇐ -١ = ٣ + جـ ⇐ جـ = -٤

∴ من ✱ معادلة الخط المستقيم هي ص = ٣ س - ٤ #

مثال ⑬ أ- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢، ٥) ويوازي المستقيم الذي ميله $\frac{١}{٢}$

ب- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٠، ٤) وعمودي على المستقيم ص = $\frac{٢}{٣}$ س - ٥

الحل :-

أ :- ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٢}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١}{٢}$ "لأن المستقيمان متوازيان"

∴ تصبح المعادلة على الصورة ص = $\frac{١}{٢}$ س + جـ ⟵ ✱

∵ المستقيم يمر بالنقطة (٢، ٥) ∴ تحقق معادلته

∴ بالتعويض بالنقطة في المعادلة ✱

⇐ ٥ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ + جـ ⇐ ٥ = ١ + جـ ⇐ جـ = ٤

∴ معادلة المستقيم هي ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٤ #

ب :- ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٣}{٢}$ "لأن المستقيمان متعامدان"

∴ تصبح المعادلة على الصورة ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + جـ ⟵ ✱

∵ المستقيم يمر بالنقطة (٠، ٤) ∴ تحقق معادلته

∵ بالتعويض بالنقطة في المعادلة

$\Leftarrow$ ٤ = $-\frac{٣}{٢}$ × ٠ + جـ $\Leftarrow$ ٤ = ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤

∴ معادلة المستقيم هي **ص = $-\frac{٣}{٢}$ س + ٤** .

تدريب: ① أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، -١) ويوازي المستقيم الذي ميله = $\frac{١}{٣}$.

② أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٥، ١) وعمودي على المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٠، -٤) ، (١، ١) .

مثال ④: أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات وكذلك الجزء المقطوع من محور السينات في المعادلة ٢س + ٣ص = ٦

الحل:

• لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات نضع س = ٠ في المعادلة

∴ ٣ص = ٦ $\overset{(\div ٣)}{\Leftarrow}$ **ص = ٢** ∴ نقطة التقاطع مع محور الصادات هي (٠، ٢)

• لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠ في المعادلة

∴ ٢س = ٦ $\overset{(\div ٢)}{\Leftarrow}$ **س = ٣** ∴ نقطة التقاطع مع محور السينات هي (٣، ٠)

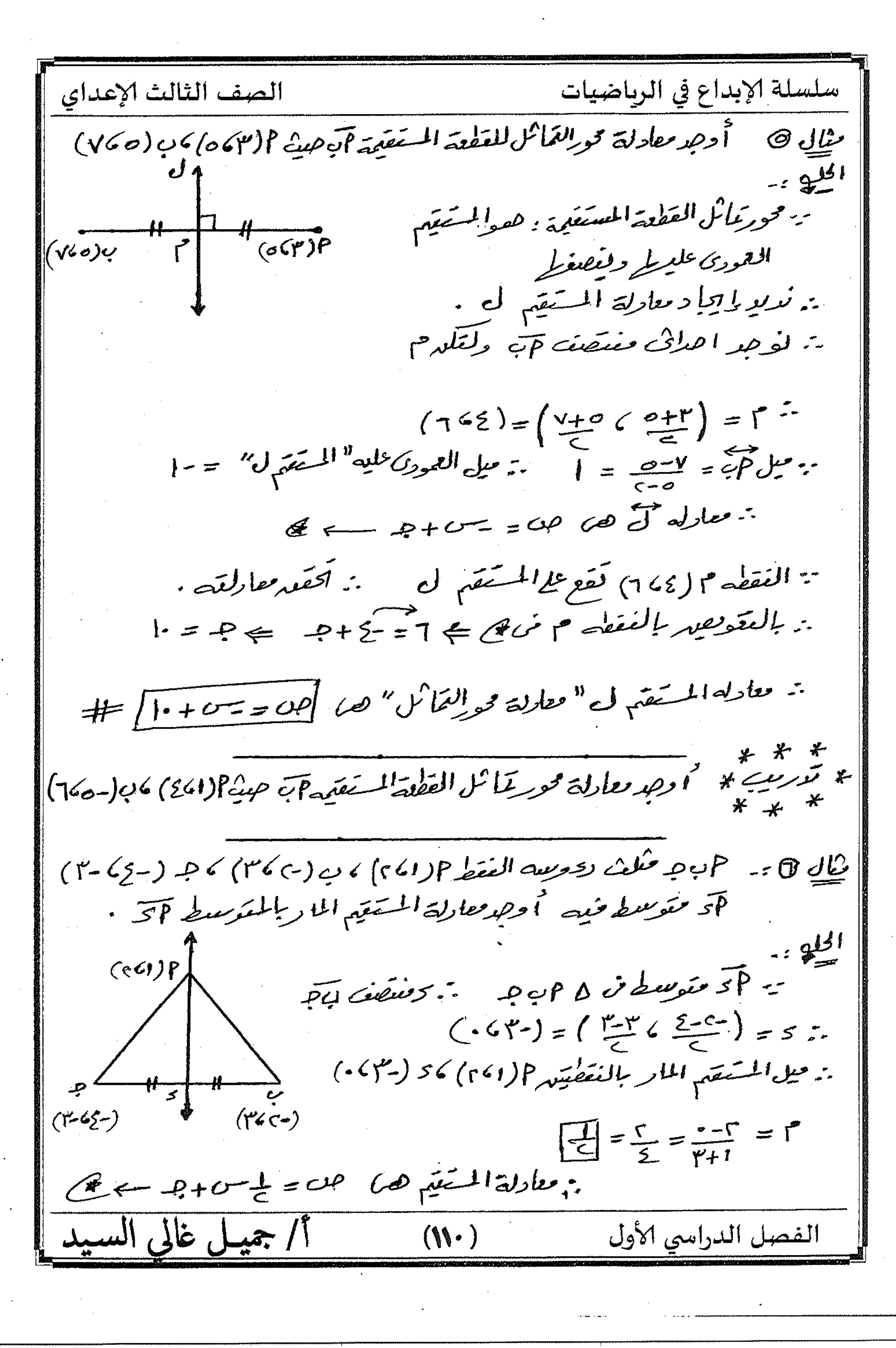
حل آخر: ملحوظة: المعادلة التي على الصورة $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

* طول الجزء المقطوع من محور السينات هو أ ويمر بالنقطة (أ، ٠) .
* طول الجزء المقطوع من محور الصادات هو ب ويمر بالنقطة (٠، ب) .

∵ المعادلة هي ٢س + ٣ص = ٦ $\overset{(\div ٦)}{\Leftarrow}$ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ١$

∴ طول الجزء المقطوع من محور السينات هو ٣ ويمر بالنقطة (٣، ٠) .

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات هو ٢ ويمر بالنقطة (٠، ٢) .



مثال ⑤ أوجد معادلة محور التماثل للقطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ(٣، ٥)، ب(٥، ٧)

الحل:

∵ محور تماثل القطعة المستقيمة: هو المستقيم العمودي عليها ومنصفها

∴ نريد إيجاد معادلة المستقيم ل .

∴ نوجد احداثي منتصف $\overline{أب}$ ولتكن م

∴ م = $\left(\frac{٣+٥}{٢} ، \frac{٥+٧}{٢}\right)$ = (٤، ٦)

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٧-٥}{٥-٣}$ = ١ ∴ ميل العمودي عليه "المستقيم ل" = -١

∴ معادلة $\overleftrightarrow{ل}$ هي ص = -س + جـ ← ⊛

∵ النقطة م (٤، ٦) تقع على المستقيم ل ∴ تحقق معادلته .

∴ بالتعويض بالنقطة م في ⊛ ⇐ ٦ = -٤ + جـ ⇐ جـ = ١٠

∴ معادلة المستقيم ل "معادلة محور التماثل" هي **ص = -س + ١٠** #

---

* تدريب * أوجد معادلة محور تماثل القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ(١، ٤)، ب(-٥، ٦)

مثال ⑥: أ ب جـ مثلث رؤوسه النقط أ(١، ٢)، ب(-٢، ٣)، جـ (-٤، -٣)
أد متوسط فيه أوجد معادلة المستقيم المار بالمتوسط $\overline{أد}$.

الحل:

∵ $\overline{أد}$ متوسط في Δ أ ب جـ ∴ د منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ د = $\left(\frac{-٢-٤}{٢} ، \frac{٣-٣}{٢}\right)$ = (-٣، ٠)

∴ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(١، ٢)، د(-٣، ٠)

م = $\frac{٢-٠}{١+٣}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\boxed{\frac{١}{٢}}$

∴ معادلة المستقيم هي ص = $\frac{١}{٢}$س + جـ ← ⊛

∵ المستقيم يمر بالنقطة أ (١ ، ٢) ∴ تحقق معادلته .

∴ بالتعويض بالنقطة أ في المعادلة

⇐ ٢ = $\frac{١}{٢}$ × ١ + جـ ⇐ ٢ = $\frac{١}{٢}$ + جـ ⇐ جـ = $\frac{٣}{٢}$.

∴ المعادلة هي $ص = \frac{١}{٢} س + \frac{٣}{٢}$

مثال ⑦ :- الشكل المقابل يمثل حركة سيارة تسير بسرعة منتظمة حيث المسافة (ف) والزمن (ن) أوجد :-

١- المسافة عند بدء الحركة .

٢- سرعة السيارة .

٣- معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة السيارة .

الحل :-

١- المسافة عند بدء الحركة = ٥٠ كم .

٢- سرعة السيارة = ميل الخط المستقيم

نأخذ أي نقطتين على الخط المستقيم ولتكن (٠ ، ٥٠) ، (٤ ، ١٥٠)

∴ سرعة السيارة = $\frac{١٥٠ - ٥٠}{٤ - ٠}$ = $\frac{١٠٠}{٤}$ = ٢٥ كم / س .

٣- معادلة الخط المستقيم هي ف = م ن + جـ ⇐ ف = ٢٥ ن + ٥٠ #

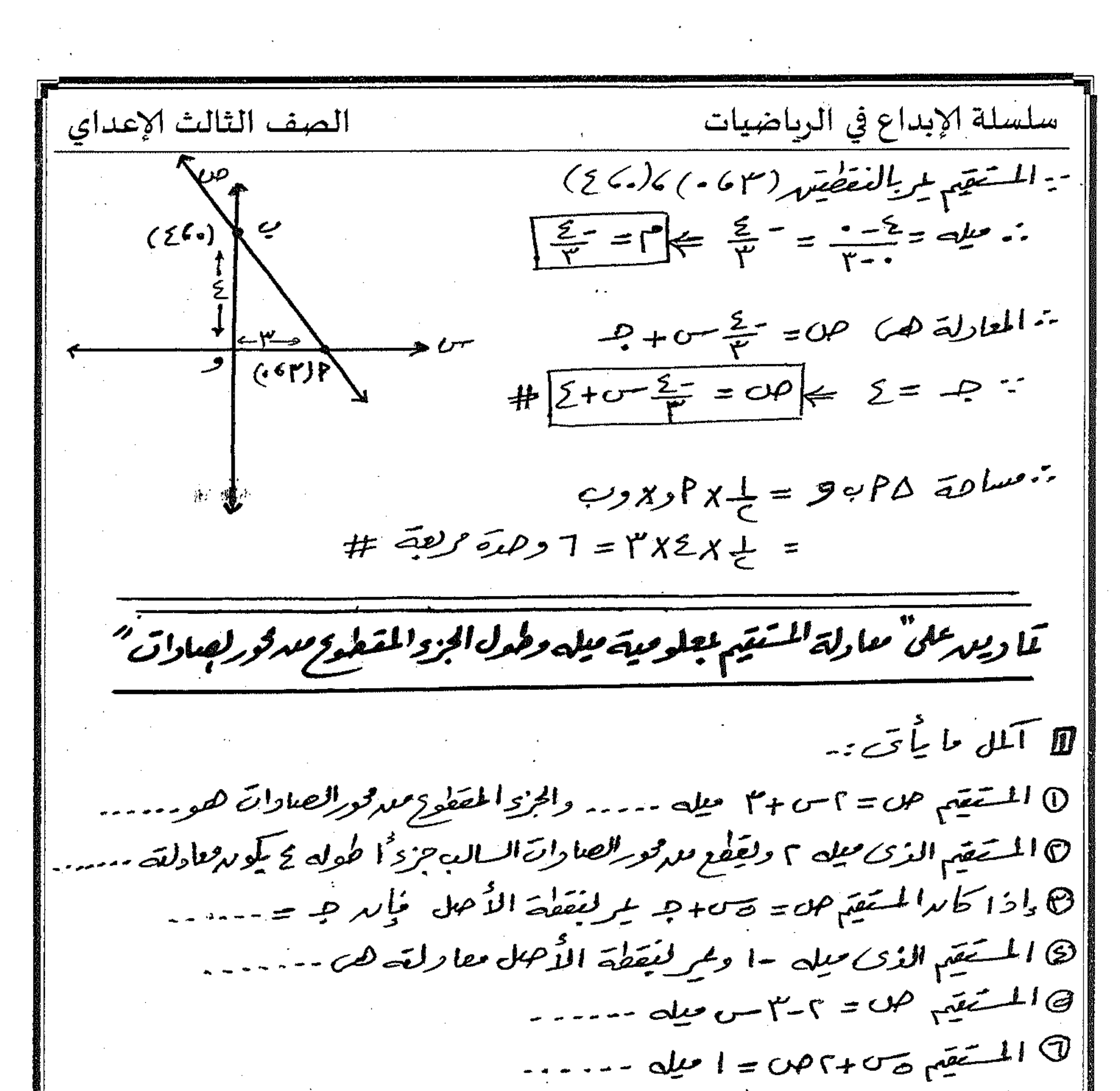
(الجزء المقطوع من الصادات)

مثال ⑧ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزئين موجبين طولاهما ٣ ، ٤ وحدات طولية على الترتيب . ثم أوجد مساحة المثلث المحصور بين المستقيم ومحوري الإحداثيات .

الحل :-

∵ المستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٣ وحدات ⇐ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٠)

∵ المستقيم يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٤ وحدات ⇐ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٤)



∵ المستقيم يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

∴ ميله = $\frac{٤ - ٠}{٠ - ٣}$ = $-\frac{٤}{٣}$ ⇐ م = $-\frac{٤}{٣}$

∴ المعادلة هي ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + جـ

∵ جـ = ٤ ⇐ ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ٤ #

∴ مساحة Δ أ ب و = $\frac{١}{٢}$ × أ و × و ب

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٣ = ٦ وحدة مربعة #

تمارين على " معادلة المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات "

١ أكمل ما يأتي :-

① المستقيم ص = ٢ س + ٣ ميله ...... والجزء المقطوع من محور الصادات هو ......

② المستقيم الذي ميله ٢ ويقطع من محور الصادات السالب جزءاً طوله ٤ يكون معادلته ......

③ إذا كان المستقيم ص = ٥ س + جـ يمر بنقطة الأصل فإن جـ = ...

④ المستقيم الذي ميله -١ ويمر بنقطة الأصل معادلته هي ......

⑤ المستقيم ص = ٢ - ٣ س ميله ......

⑥ المستقيم ٥ س + ٢ ص = ١ ميله ......

⑦ المستقيم الذي يمر بالنقطتين (-٢ ، ٠) ، (-٣ ، -١) ميله ......

⑧ المستقيم $\frac{ص}{٣}$ - $\frac{س}{٤}$ = ١ ميله ......

⑨ المستقيم س = ٤ ميله ...... ويكون موازياً لمحور ......

⑩ المستقيم ص = ٥ ميله ...... ويكون موازياً لمحور ......

⑪ إذا كان المستقيمان ٢ س - ص - ٣ = ٠ ، ك س - ٣ ص - ٥ = ٠ متوازيان فإن ك = ...

⑫ إذا كان المستقيمان ٣ س - ٤ ص - ٥ = ٠ ، ٦ س - ٨ ص - ك = ٠ منطبقين فإن ك = ...

⑬ إذا كانت (٢ ، ٥) تقع على المستقيم ص = س + جـ فإن جـ = ...

⑭ معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ١) وميله ٣ هي ......

(١٥) المستقيم الذي معادلته ٢س + ٣ص - ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ......

(١٦) المستقيم الذي ميله = ٢ ويقطع محور الصادات عند النقطة (٠، ٣) معادلته هي ......

(١٧) معادلة محور السينات هي .... ، بينما معادلة محور الصادات هي ......

(١٨) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٥) ويوازي محور السينات هي ....

(١٩) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (-٣، ٢) ويوازي محور الصادات هي ....

(٢٠) إذا كان المستقيم الذي معادلته ٢س - ك ص = ٣ عمودياً على المستقيم الذي معادلته ص + ٣س + ٢ = ٠ فإن ك = ...

---

[٢] أوجد معادلة الخط المستقيم :

(١) المار بالنقطة (٢، ١) وميله يساوي ٢

(٢) المار بالنقطة (٣، -٥) ويوازي المستقيم س + ٢ص - ٧ = ٠

(٣) المار بالنقطة (٣، -٢) وعمودي على المستقيم ص = $\frac{1}{2}$ س - ٥

(٤) المار بالنقطة (١، ٢) عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين أ(٢، -٣)، ب(٥، -٤)

(٥) المار بالنقطتين (٢، -١)، (١، ١)

(٦) المار بالنقطتين (٤، ٢)، (-٢، -١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل.

(٧) الذي ميله يساوي ميل الخط المستقيم $\frac{ص - ١}{س}$ = $\frac{1}{3}$ ويقطع جزءاً سالباً من محور الصادات قدره ٥ وحدات.

(٨) العمودي على أب من نقطة منتصفه حيث أ(١، ٣)، ب(٣، ٥)

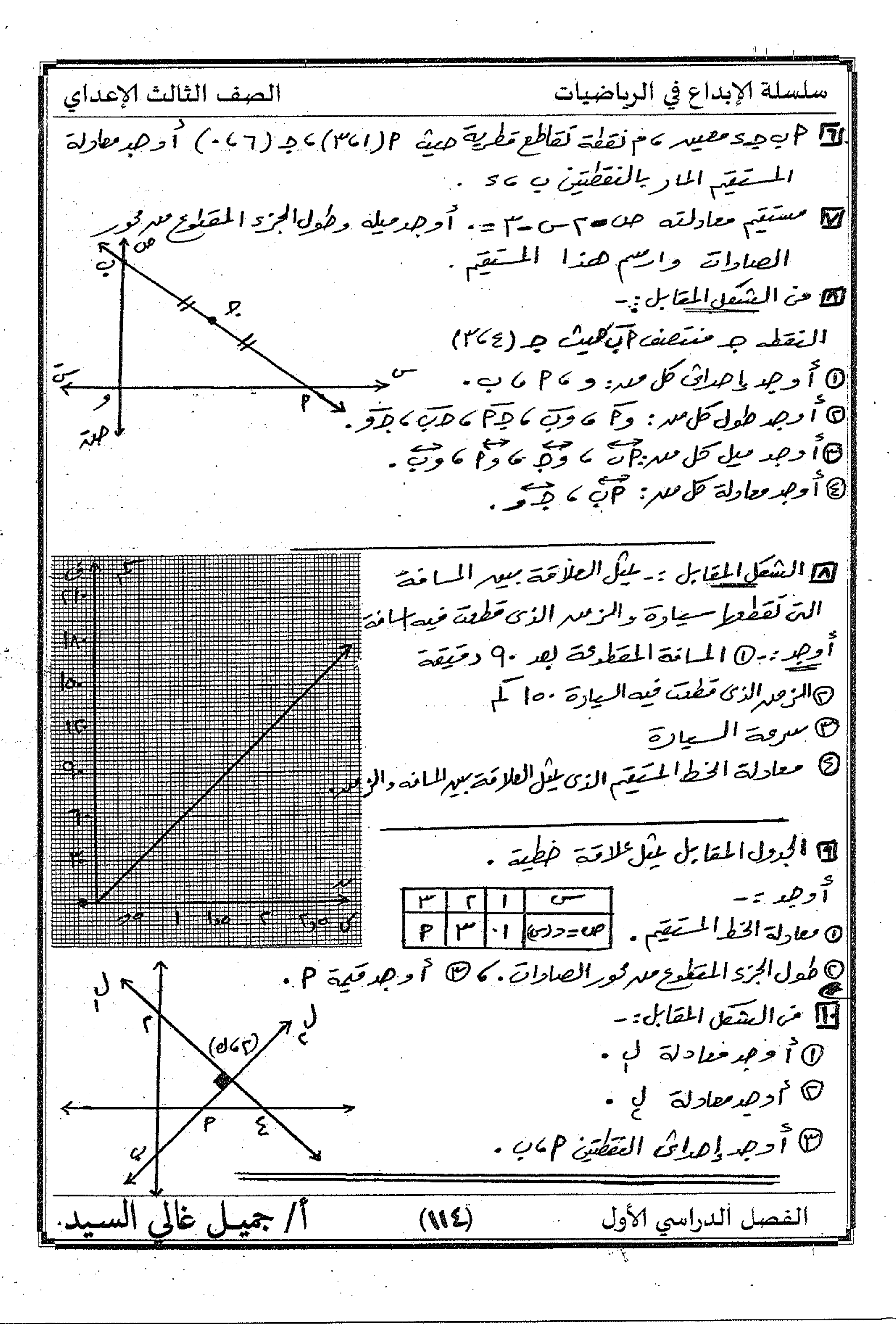
(٩) يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ٥ وعمودي على المستقيم الذي ميله ٥.

---

[٣] إذا كان أ(٥، -٦)، ب(٣، ٧)، جـ(١، -٣) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة أ وبمنتصف $\overline{ب جـ}$

[٤] أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزئين موجبين طولاهما ٤، ٩ على الترتيب.

[٥] أ ب جـ مثلث فيه أ(١، ٢)، ب(٥، -٢)، جـ(٣، ٤)، د منتصف $\overline{أب}$، رسم $\overleftrightarrow{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أ جـ}$ في هـ، أوجد (١) طول د هـ، (٢) معادلة المستقيم د هـ



٦ أ ب جـ د معين ، م نقطة تقاطع قطرية حيث أ(١ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ب ، د .

٧ مستقيم معادلته ص = ٢ س - ٣ = . أوجد ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات واسم هذا المستقيم .

٨ من الشكل المقابل :-

النقطة جـ منتصف أب حيث جـ (٤ ، ٣)

① أوجد إحداثي كل من : و ، أ ، ب .

② أوجد طول كل من : و أ ، و ب ، جـ أ ، جـ ب ، جـ و .

③ أوجد ميل كل من : أب ، و جـ ، و أ ، و ب .

④ أوجد معادلة كل من : أب ، جـ و .

---

٨ الشكل المقابل :- يمثل العلاقة بين المسافة التي تقطعها سيارة والزمن الذي قطعت فيه المسافة

أوجد :- ① المسافة المقطوعة بعد ٩٠ دقيقة

② الزمن الذي قطعت فيه السيارة ١٥٠ كم

③ سرعة السيارة

④ معادلة الخط المستقيم الذي يمثل العلاقة بين المسافة والزمن .

---

٩ الجدول المقابل يمثل علاقة خطية .

أوجد :-

س	١	٢	٣
ص = د(س)	-١	٣	أ

① معادلة الخط المستقيم .

② طول الجزء المقطوع من محور الصادات . ، ③ أوجد قيمة أ .

١٠ من الشكل المقابل :-

① أوجد معادلة ل١ .

② أوجد معادلة ل٢ .

③ أوجد إحداثي النقطتين أ ، ب .

اختبار الوحدة

● الشكل المقابل :
يمثل حركة جسيم يتحرك بسرعة منتظمة (ع) خيث المسافة (ف) مقيسة بالمتر والزمن (ن) بالثانية ؛ أوجد :

متر
ثانية

أ المسافة عند بدء الحركة .
ب سرعة الجسيم .
جـ معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة الجسيم .
د المسافة المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة .
هـ الزمن الذى يقطع فيه الجسيم مسافة ٣,٥ من المتر من بدء الحركة.

● اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

● المستقيم الذى معادلته ٢س – ٣ص -٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله :
أ -٦ ب -٢ جـ $\frac{٢}{٣}$ د ٢

● إذا كان المستقيمان ٣ س -٤ص -٣ = ٠، ك ص + ٤س -٨ = ٠ متعامدين فإن ك =
أ -٤ ب -٣ جـ ٣ د ٤

● إذا كان المستقيمان س + ص = ٥، ك س + ٢ص = ٠ متوازيين فإن ك تساوى :
أ -٢ ب -١ جـ ١ د ٢

● مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣س -٤ص = ١٢، س = ٠، ص = ٠ يساوى :
أ ٦ ب ٧ جـ ١٢ د ٥

● $\overleftrightarrow{أب}$ مستقيم يمر بالنقطتين (٢، ٥)، (٥، ٢)؛ أى من النقط التالية ∈ $\overleftrightarrow{أب}$
أ (١، ٦) ب (٢، ٣) جـ (٠، ٠) د (-٣، -٤)

● إذا كان أ (٣، ٥)، ب (٢، -١)، جـ (س، ص) فإن إحداثيي نقطة جـ التى تجعل △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب هى:
أ (٦، -١) ب (-٤، ٥) جـ (-٣، -٢) د (-٨، -٢)

● أ (٥، -٦)، ب (٣، ٧)، جـ (١، -٣)؛ فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف ب جـ .

● أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ من نقطة منتصفها حيث أ (١، ٣)، ب (٣، ٥) .

● أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، -٥) ويوازى المستقيم س + ٢ص – ٧ = ٠ .

● أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢)، (-٢، -١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

● أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولهما ٤، ٩ على الترتيب.

● أ ب جـ مثلث فيه أ (١، ٢)، ب (٥، -٢)، جـ (٣، ٤)، د منتصف $\overline{أب}$، رسم $\overleftrightarrow{دهـ}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أجـ}$ فى هـ ؛ أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{دهـ}$.

" مع أطيب الأمنيات بالنجاح والتوفيق "

" تمت بحمد الله "

أ/ جميل غالي